SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

Exercice 1 Considérons le système différentiel suivant :

$$(E)\begin{cases} x' = & 8x - 18y + 27z \\ y' = & -3x + \frac{7}{2}y - 6z \\ z' = & -4x + 7y - 11z. \end{cases}$$

1. Écrire le système (E) sous la forme $X' = AX$, pour une certaine matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$. $X(t)$ sera le vecteur colonne formé par $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.
2. Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$.
3. Soit $u(t)$, $v(t)$ et $w(t)$ les coordonnées de $Y(t)$. Montrer que u, v et w sont solutions d'un système différentiel particulièrement simple, que l'on résoudra.
4. Déterminer l'ensemble des solutions du système (E).

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A, on admettra que les valeurs propres de f sont 2, $-1/2$ et -1, et que $u = (-3/2, 1, 1)$, $v = (0, 3/2, 1)$ et $w = (1, 2, 1)$ sont des vecteurs propres respectivement associés à ces valeurs propres.

Exercice 2 Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = & 12x - 10y + 5z \\ y' = & 10x - 8y + 5z \\ z' = & -10x + 10y - 3z. \end{cases}$$

Déterminer l'unique solution du système tel que
- $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ et $z(0) = 2$ (sans calculs),
- $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ et $z(0) = 1$.

Exercice 3 Résoudre le système différentiel suivant (on cherchera d'abord l'ensemble des solutions à valeurs complexes, puis celui des solutions à valeurs réelles) :

$$\begin{cases} x' = & 7x - 4y + 2z \\ y' = & 13x - 6y + 6z \\ z' = & -3x + 2y. \end{cases}$$

Exercice 4 Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x' = & -x + 2y + 3z \\ y' = & 2x + 2y + 6z \\ z' = & x + 2y + z, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = & -x + 2y + 3z - 6t + 1 \\ y' = & 2x + 2y + 6z + 3t + 2 \\ z' = & x + 2y + z + 1. \end{cases}$$

Comme à l'exercice 2, on admettra que l'endomorphisme associé à la matrice du premier système admet une base de vecteurs propres (u, v, w), où $u = (1, 2, 1)$ est associé à la valeur propre 6, tandis que $v = (-2, 1, 0)$ et $w = (-3, 0, 1)$ sont associés à la valeur propre 2.

Exercice 5

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

   Trouver une base de chaque sous-espace propre de f. Trouver une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$T_{a,b} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a,\, b \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}^*$ fixés. Exprimer la matrice de f dans la base $(e_1, \mu e_2, e_3 + \lambda e_1)$. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = T_{0,1}$.
3. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = & x - 3y + 4z \\ y' = & 4x - 7y + 8z \\ z' = & 6x - 7y + 7z. \end{cases}$$

Exercice 6 Résoudre les systèmes différentiels suivant :

$$\begin{cases} x' = & 13x - 20y - 10z \\ y' = & 15x - 22y - 10z \\ z' = & -15x + 20y + 8z, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = & 13x - 20y - 10z - \cos t \\ y' = & 15x - 22y - 10z - \cos t \\ z' = & -15x + 20y + 8z + \cos t. \end{cases}$$

Comme à l'exercice 2, on admettra que l'endomorphisme associé à la matrice du premier système admet une base de vecteurs propres (u, v, w), où $u = (-1, -1, 1)$ est associé à la valeur propre 3, tandis que $v = (2, 0, 3)$ et $w = (0, 1, -2)$ sont associés à la valeur propre -2.

Exercice 7 Vérifier que les indications données en italiques aux exercices 1, 4 et 6 sont justes.

Exercice 8 On pose $A = \begin{pmatrix} 12 & -10 & 5 \\ 10 & -8 & 5 \\ -10 & 10 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A. En déduire une expression de la matrice $\exp(tA)$, pour tout t. (On ne calculera pas l'inverse de la matrice de passage.)
2. Soit $X_0 \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne. Montrer que $\exp(tA)X_0$ est solution de l'équation différentielle matricielle $X' = AX$. Retrouver les résultats de l'exercice 2.

Exercice 9 On reprend les notations de l'exercice 5.

1. Donner une matrice diagonale D et une matrice triangulaire supérieure stricte N telles que $DN = ND$ et $T = D + N$.
2. Calculer N^2, puis $\exp(tN)$ pour tout t. Calculer $\exp(tT)$ pour tout t.
3. Donner une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$. En déduire une expression simple de $\exp(tA)$ pour tout t. (On ne calculera pas l'inverse de la matrice de passage.)
4. Retrouver le résultat de l'exercice 5.