Université de Caen
UFR de Sciences
Mathématiques

2005-2006
L2 MASS
EMA 43

Partiel n° 2

lundi 13 mars 2006

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

durée : 2 heures
Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

I. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (-3x - 5y + 5z, -5x - 3y + 5z, -5x - 5y + 7z).$$

1. Montrer que le vecteur $e'_1 = (1,1,1)$ est vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$.
3. Montrer que 2 est valeur propre de f et donner une base (e'_2, e'_3) du sous-espace propre associé.
4. Écrire la matrice de f dans la base canonique et dans la base (e'_1, e'_2, e'_3).
(On ne demande pas de vérifier que c'est effectivement une base.)
5. Calculer le polynôme caractéristique de f.

II. Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x > \cos x\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x > e^{x^2}\}$.

1. Exprimer A et B comme des images réciproques.
2. Démontrer que A, B et $A \cap B$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
3. Exprimer $\sin(x - \frac{\pi}{4})$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
En déduire la forme explicite de $A \cap [0, 2\pi]$ puis de A.
4. Expliciter B sous la forme d'un intervalle.
5. Déterminer l'adhérence $\overline{A \cap B}$ de $A \cap B$ et montrer que c'est un compact de $\mathbb{R}$.

III. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.

1. Déterminer $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$.
2. Trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui décroît vers 0 et telle que $f(x_n) = \frac{1}{2}$ pour tout n.
3. En déduire que f n'est pas continue en 0.
4. Qu'en est-il si on pose $f(0) = \frac{1}{2}$ au lieu de 0 ?

IV. Soit f et g deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$\varphi(x) = \max(f(x), g(x)).$$

1. Montrer que pour tous a, $b \in \mathbb{R}$ on a $\max(a,b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.
2. Montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \max(f(x), g(x))$ est continue.
3. Montrer que $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \notin \mathbb{Z}\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
4. Soit $I = [-|\varphi(0)|, |\varphi(0)|]$. Montrer que $B = \{x \in I \mid \varphi(x) \in I\}$ est un compact non vide de $\mathbb{R}$.