Université de Caen **2005-2006**
UFR de Sciences **L2 MASS**
Mathématiques **2^e^ semestre**

Algèbre
Feuille n° 3

Quelques rappels de cours. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie.

- Une *forme bilinéaire* sur E est une application $\varphi : E\times E \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x+x', y) = \varphi(x, y)+\varphi(x', y)$, $\varphi(x, y+y') = \varphi(x, y)+\varphi(x, y')$ et $\varphi(\lambda x, y) = \varphi(x, \lambda y) = \lambda\varphi(x, y)$ pour tous x, x', y, $y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- La forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est dite *symétrique* si on a $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tous x, $y \in E$. Elle est dite *positive* si on a $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$, et *définie-positive* si $\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
- Une *forme quadratique* est une application $q : E \to \mathbb{R}$ telle que $q(x) = \varphi(x, x)$ pour une certaine forme bilinéaire symétrique φ. On a la formule de *polarisation* : $\varphi(x, y) = (q(x + y) - q(x - y))/4$.
- Un *produit scalaire* est une forme bilinéaire symétrique et définie-positive. Un *espace euclidien* est un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire φ.
- Dans un espace euclidien on note $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$ et $x \cdot y = \varphi(x, y)$. On dispose de l'*inégalité triangulaire* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ et de l'*inégalité de Cauchy-Schwartz* $|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|$.
- Soit E un espace euclidien. Deux vecteurs x, $y \in E$ sont dits *orthogonaux* si on a $x\cdot y = 0$. L'*orthogonal* d'une partie $A \subset E$ est le sous-espace $A^\perp = \{x \in E \mid \forall\ y \in A \quad y \cdot x = 0\}$.
- Une base (x_i) d'un espace euclidien E est dite *orthogonale* si on a $x_i \cdot x_j = 0$ pour tous $i \neq j$, *orthonormale* si de plus $\|x_i\| = 1$ pour tout i.

I. Montrer que les applications φ suivantes sont des formes bilinéaires, dire si elles sont symétriques et calculer $\varphi(x, x)$:

1. $\varphi\left((x, y, z), (x', y', z')\right) = xx' + 2xy' + zz' - 2yz' + 2x'y$
2. $\varphi\left((x, y), (x', y')\right) = 3xx' - x'y - xy' + yy'$

Montrer que les applications q suivantes sont des formes quadratiques en calculant les formes bilinéaires associées :

1. $q(x, y, z) = x^2 + 4xy - 2yz + z^2$
2. $q(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$
3. $q(x, y, z) = 2xy - y^2 + 5yz + 3z^2$
4. $q(x, y, z) = xy + 2xz - yz$
5. $q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$

II. Les formes quadratiques suivantes sont-elles positives ? définies-positives ?
En donner des expressions développées.

1. $q(x, y, z) = (x + 2y)^2 + (z - y)^2 - 5y^2$
2. $q(x, y) = 2x^2 + (y - x)^2$
6. $q(x, y, z) = -2(x + y - z)^2 + (y - 2z)^2 + (2x + y)^2$

Inversement, en écrivant les formes quadratiques 3, 4 et 5 de l'exercice précédent comme combinaisons linéaires d'un minimum de carrés, dire si elles sont positives ou pas.

III. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$.

1. Montrer que la forme bilinéaire associée à q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
   Calculer les quantités suivantes : $\|(0,0,1)\|$, $\|(3,1,0)\|$, $(3,1,0)\cdot(-4,0,1)$, $\|(0,4,3)\|$.
2. Orthonormaliser la base canonique (e_1, e_2, e_3).
   Soit P l'orthogonal du vecteur $e_1 + e_2$. Trouver une base orthonormale de P.
3. Soit Q l'orthogonal du vecteur e_3.
   (a) Écrire l'équation de Q.
   (b) Trouver une base de Q, puis une base orthonormale de Q.
   (c) Donner une base orthonormale (v_1, v_2, v_3) de $(\mathbb{R}^3, q)$ telle que $Q = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$.

IV. Soient n un entier positif et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.
   Calculer $||X - \frac{1}{2}||$ et $(2X-1)\cdot X^2$.
2. Soit F le sous-espace vectoriel des polynômes $P \in E$ tels que $P'(0) = 0$.
   (a) En écrivant F comme un noyau, montrer que $F^\perp$ est une droite.

   Soit H un vecteur directeur de $F^\perp$. On peut supposer qu'on a $\int_0^1 H(t)^2\mathrm{d}t = H'(0)$, quitte à multiplier H par une constante.

   (b) En vérifiant l'égalité pour les éléments de F puis pour H, montrer qu'on a
   $$\forall\ P \in E \quad \int_0^1 H(t)P(t)\mathrm{d}t = P'(0).$$
3. On considère le cas $n = 2$.
   (a) Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ selon le procédé de Gram-Schmidt.
   (b) Calculer le polynôme H.

V. Soit E un espace euclidien.

1. Montrer que pour tous u, $v \in E$, on a l'égalité
   $$2\,(u\cdot v) = \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2.$$
2. En déduire que pour tous u, $v \in E$, on a l'*égalité de la médiane* :
   $$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$
3. En déduire par ailleurs que pour tous u, $v \in E$ on a
   $$u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

VI. Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y,z) = x^2 + 6y^2 + 16z^2 - 4xy + 6xz - 16yz.$$

1. Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée à q est un produit scalaire.
2. Orthonormaliser la base canonique.
3. Donner l'équation du plan orthogonal au vecteur $(0,1,2)$.