**Université de Caen**
**UFR de Sciences**
**Mathématiques**

**2005-2006**
**L2 MASS**
**2$^{e}$ semestre**

# Analyse
# Feuille n$^{o}$ 3

Quelques rappels de cours :

- Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et toute partie $A \subset \mathbb{R}$ on appelle *image* de $A$ par $f$, et on note $f(A)$, l'ensemble $\{f(x) \mid x \in A\}$.
- Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et toute partie $A \subset \mathbb{R}$ on appelle *image réciproque* de $A$ par $f$, et on note $f^{-1}(A)$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A\}$.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, l'image réciproque par $f$ d'un ouvert est un ouvert, et celle d'un fermé est un fermé.
- Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite *compacte* si toute suite à valeurs dans $A$ admet une sous-suite convergente.
- Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$.
- L'image d'une partie compacte de $\mathbb{R}$ par une application continue est compacte.
  L'image d'un intervalle fermé borné par une application continue est un intervalle fermé borné.

**I.** Déterminer si les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants sont ouverts ou fermés :

$E_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 2| \leq 2\}$ $\qquad$ $E_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \geq -\frac{1}{3}\}$

$E_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sh} x \geq \sin x\}$ $\qquad$ $E_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid e^{-\operatorname{ch} x} < \sin x < e^{\operatorname{ch} x}\}$

Un seul de ces ensembles est compact. Lequel ?

**II.** Pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$ on pose $f(x) = \sqrt{1 + e^{\sin x}}$.

1. Montrer que $f(\mathbb{R}) = f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [\sqrt{1 + 1/e}, \sqrt{1 + e}\,]$.
2. Montrer que $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < \frac{3}{2}\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 2\}$.

**III.** Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction partie entière, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - E(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Tracer le graphe de $f$ sur $[-3, 3]$.
2. Écrire $I = f^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ et $J = f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$ comme réunions infinies d'intervalles.
3. $I$ et $J$ sont-ils ouverts, fermés, ou ni l'un ni l'autre ? Commenter.
4. Trouver deux intervalles compacts $C$, $D \subset \mathbb{R}$ tels que $f(C)$ soit compact, mais pas $f(D)$.

**IV.** Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et soit $A = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{R}$ la boule ouverte $B(x, r)$ ne contient qu'un nombre fini de points de $A$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus A$ il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \cap A = \emptyset$.
3. En déduire que $A$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Est-il compact ?

**V.** Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par la formule $f(x) = 1 - x^2$.

1. Étudier les variations de $f$ et tracer le graphe de $f$. On précisera les tangentes en 0 et en 1 et on déterminera le point d'intersection de la courbe avec la droite $y = x$, dont on note l'abscisse $\alpha$.
2. Faire la même étude pour $g = f \circ f$.
3. On prend $u_0 \in [0,1]$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)$ admet des sous-suites convergentes.
   (b) Montrer que si $u_0 \in ]0,\alpha[$, la suite $(u_{2n})$ décroît vers 0 et la suite $(u_{2n+1})$ croît vers 1.
   (c) Procéder à l'étude analogue lorsque $u_0 \in ]\alpha, 1[$.
   (d) Que se passe-t-il lorsque $u_0 = 0$, $\alpha$ ou 1 ?
   À quelle condition sur $u_0$ la suite $(u_n)$ est-elle convergente ?

**VI.** On pose $u_n = \dfrac{\pi}{3n}\,(3n^2 + n + 3)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer sans calcul que la suite $(\sin u_n)$ admet une sous-suite convergente.
2. Montrer que les sous-suites $(\sin u_{2n})$ et $(\sin u_{2n+1})$ convergent vers des réels $l_0$ et $l_1$ à préciser.
3. Soit $(u_{\varphi(n)})$ une sous-suite de $(u_n)$ telle que $(\sin u_{\varphi(n)})$ converge vers un réel $l$.
   Si $\varphi$ prend une infinité de valeurs paires, montrer que $l = l_0$. Sinon, montrer que $l = l_1$.
4. Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérences de $(\sin u_n)$ ?

**VII.** Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonctions partie entière.

1. La fonction $E$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?
2. Montrer que pour tout $A \subset \mathbb{R}$, l'ensemble $E(A)$ est fermé.
3. Dans quels cas $E(A)$ est-il compact ? Montrer que l'image d'un compact par $E$ est compacte.
4. Existe-t-il $B \subset \mathbb{R}$ tel que $E(B)$ soit un ouvert de $\mathbb{R}$ ?
5. Déterminer $C = E^{-1}(]0, e[)$. Est-ce un ouvert, un fermé, ou ni l'un ni l'autre ?
6. Répondre aux mêmes questions pour $D = E^{-1}([0, e])$.