Université de Caen
UFR de Sciences
Mathématiques

2005-2006
L2 MASS
2e semestre

Analyse
Feuille n° 4

Quelques rappels de cours. Soit n, $p \in \mathbb{N}^*$ des entiers naturels.

- Si $\mathcal{O}$ et $\mathcal{F}$ sont des parties respectivement ouverte et fermée de $\mathbb{R}^p$, et si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est continue, alors $\varphi^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert et $\varphi^{-1}(\mathcal{F})$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
- Les applications constantes et les applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x = (x_1, \ldots, x_n)$ associent une des coordonnées x_i sont continues.
- La somme et le produit de deux applications continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ sont continues.
- Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des applications continues, alors $g \circ f$ est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
- Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application continue, et g est une application continue d'un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors $\frac{f}{g}$ est une application continue de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}$.

I. Soit P un polynôme à deux variables et à coefficients réels. Montrer que l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $P(x)$ est continue.

II. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme suit est continue sur $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}.$$

III. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Montrer que φ est continue en $(0, 0)$.
On pourra commencer par montrer que $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ *et* $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ *pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

IV. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

L'application φ est-elle continue en $(0, 0)$? *On pourra calculer* $\varphi(x, x)$ *pour* $x \neq 0$.
Qu'en est-il si on pose $\varphi(0, 0) = \frac{1}{2}$ au lieu de 0 ?

V. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, puis sur toute droite passant par $(0, 0)$.
Faire tendre (x, y) vers $(0, 0)$ sur la parabole d'équation $y = x^2$. L'application φ est-elle continue en $(0, 0)$?

VI. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \left(1+x^2+y^2\right) \dfrac{\sin y}{y} & \text{si } \ y \neq 0 \\ 1+x^2 & \text{si } \ y = 0. \end{cases}$$

Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Que peut-on en déduire pour les sous-ensembles suivants :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x,y) > 2\},$$
$$B = \{\varphi(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 2\}\,?$$

VII. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des applications suivantes :

$$\varphi_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}(x-y)}{x-y} & \text{si } \ x \neq y \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\varphi_2(x,y) = 1 + x^2 - y^2,$$

$$\varphi_3(x,y) = \begin{cases} \varphi_1(x,y) & \text{si } \ x > y \\ \varphi_2(x,y) & \text{si } \ x \leq y. \end{cases}$$