Université de Caen
UFR de Sciences
Mathématiques

2005-2006
L2 MASS
2e semestre

ANALYSE
FEUILLE N° 9

Rappels de cours. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, D une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application.

- On dit que f admet un *minimum* (resp. un *maximum*) *global* en $a \in D$ si $f(a) \leq f(x)$ (resp. $\geq f(x)$) pour tout $x \in D$.
- On dit que f admet un *minimum* (resp. un *maximum*) *local* en $a \in D$ s'il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant a tel que $f(a) \leq f(x)$ (resp. $\geq f(x)$) pour tout $x \in V \cap D$.
- On dit que f admet un *point critique* en $a \in D$ si elle admet en ce point des dérivées partielles par rapport à toutes les variables qui sont nulles.

On suppose maintenant que $D = U$ est un ouvert et f est de classe C^2.

- Propriété. Si f admet un extremum local en $a \in U$, alors a est un point critique de f.
- Formule de Taylor-Young. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en un point critique $a \in U$ s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \|h\|^2 \varepsilon(h), \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On recherche maintenant des extrema sur $D = \varphi^{-1}(\{0\}) \subset U$ avec $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sans point critique sur D.

- Théorème. Si f admet un extremum local sur D en a, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\ i = 1, \ldots, n \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a) \quad (\text{et } \varphi(a) = 0).$$

- Lorsque la condition précédente est vérifiée, on a un minimum local en a si

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 (f - \lambda\varphi)}{\partial x_i \partial x_j}(a) > 0 \quad \text{pour tout } h \neq 0 \text{ tel que} \quad \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0,$$

  et un maximum local en a si l'inégalité opposée est vérifiée pour les mêmes vecteurs h.

I. Rechercher les extrema des fonctions

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz,$$
$$g : \mathbb{R}^2 \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{-x^2}{z} + xyz - z - y.$$

II. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

1. Calculer les dérivées partielles et déterminer les points critiques de f.
2. Étudier la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(u) = e^{-u}$.
3. En déduire les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

III. Soit $a \in \mathbb{R}$, et $f :]0, +\infty[^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x \log y + y \log x + a(x^3 + y^3)$.

1. Calculer les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre 2 en $(1, 1)$.
2. Pour quelles valeurs de a la fonction f admet-elle un extremum local en $(1, 1)$?
   Préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

IV. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par l'égalité $f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^6$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Montrer que $f(y^3, y)$ est du signe de y si $0 < |y| < 2$. En déduire que f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.
3. Écrire le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 de f aux autres points critiques.
4. Montrer que f admet $\frac{-1}{432}$ comme minimum local atteint en 2 points.
5. Montrer que si $f(x,y) \leq 0$ alors $xy^2 + y^6 \leq 0$ et $x^2 + xy^2 \leq 0$. En déduire que $f^{-1}(]-\infty, 0[) \subset A$, où $A = [-1,0] \times [-1,1]$.
6. Montrer que $f(A)$ est une partie compacte de R contenant $\frac{-1}{432}$ et toutes les valeurs négatives de f.
7. Montrer que la borne inférieure de $f(A)$ est atteinte et que c'est un extremum global pour f. Déterminer sa valeur.

V. Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = (x-y)^2 + \frac{1}{3}(x+y)^3$.

1. Montrer que h possède un seul point critique dans $\mathbb{R}^2$ mais n'admet pas d'extremum local en ce point. *On pourra considérer* $h(x,x)$.
2. On pose $A = [-1,1]^2$. Montrer que la restriction de h à A possède un maximum et un minimum global qui ne sont pas atteints sur $]-1,1[^2$. Déterminer ces extrema.

VI. Déterminer la plus grande et la plus petite valeur de la cote z du plan $z = 6 - 4x - 3y$ pour les points d'intersection de ce plan avec le cylindre $x^2 + y^2 = 1$.

VII. Déterminer les extrema liés des fonctions de deux variables suivantes :

1. $z = xy$ pour $x + y = 1$;
2. $z = x + 2y$ pour $x^2 + y^2 = 5$;
3. $z = x^2 + y^2$ pour $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$;
4. $z = (\cos x)^2 + (\cos y)^2$ pour $y - x = \frac{\pi}{4}$.

VIII. Déterminer les extrema liés des fonctions de trois variables suivantes :

1. $u = x - 2y + 2z$ pour $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;
2. $u = x^2 + y^2 + z^2$ pour $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, où $0 < a < b < c$;
3. $u = xy^2z^3$ pour $x + y + z = 12$ et $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$;
4. $u = xyz$ pour $x + y + z = 5$ et $xy + yz + zx = 8$.

IX. Démontrer l'inégalité $\frac{1}{3}(x+y+z) \geq \sqrt[3]{xyz}$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+$, en cherchant le maximum de $u = xyz$ pour $x + y + z = S$.