FICHE D'EXERCICES N° 5
Polynômes : racines, irréductibilité

On utilise les abréviations suivantes :
- *DFI pour « décomposition en facteurs irréductibles » (et unitaires),*
- *PGCD pour « plus grand commun diviseur ».*

Exercice 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme, et R le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$.

a. Montrer que $R(i) = P(i)$.

b. En déduire que $X^2 + 1$ divise P si et seulement si i est racine de P.

c. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $X^n + 1$ est-il multiple de $X^2 + 1$?

d. Le polynôme $X^2 + X + 1$ divise-t-il $X^{2004} - 1$? $X^{2005} - 1$?

Exercice 2. Soit $P = X^6 + X^4$ et $Q = X^{25} - X + 1$.

a. Montrer sans calcul que les racines communes de P et Q sont exactement les racines de leur PGCD.

b. Quelles sont les racines de P dans $\mathbb{C}$?

c. Montrer (presque) sans calcul que P et Q sont premiers entre eux.

Exercice 3. Donner la DFI dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes suivants :
- $P_1 = (X^2 + 10X + 21)(X^2 + 7X + 13)$
- $P_2 = X^3 - 8X^2 + 13X$
- $P_3 = 2X^3 + X^2 - X - 2$
- $P_4 = X^4 - 6X^2 + 25$
- $P_5 = X^4 - 16X^2 + 100$

Exercice 4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme quelconque, $Q_1 = X^4 - 6X^2 - X + 6$ et $Q_2 = X^4 + 10X^2 - X + 30$.

a. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

b. Montrer que Q_1 est de la forme $P(P(X)) - X$ avec $P = X^2 + a$ et a un réel à déterminer.

c. En déduire la DFI de Q_1 dans $\mathbb{R}[X]$.

d. Trouver de même la DFI de Q_2 dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5. Soit $P = 2X^4 - 2X^3 + 3X^2 - X + 1$ et $Q = X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 2$.

a. Calculer le PGCD de P et Q.

b. Trouver la DFI dans $\mathbb{R}[X]$ de P et Q.
(Utiliser la question précédente.)

Exercice 6. Soit $P = 2X^5 + 5X^4 + 8X^3 + 7X^2 + 4X + 1$.

a. Calculer le PGCD de P et P'.

b. Quelles sont les racines communes à P et P' ? Quelles sont les racines multiples de P ?

c. Montrer que $(X^2 + X + 1)^2$ divise P.

d. Donner la DFI de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

a. Calculer $P' - P$.

b. Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

Exercice 8. Soit a, $b \in \mathbb{R}$ et $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$.

a. On suppose que 1 est racine de P.
Montrer que $(X-1)^2$ divise P et calculer le quotient de P par $(X-1)^2$.

b. On suppose que -1 est racine de P.
Montrer que $(X+1)^2$ divise P et calculer le quotient de P par $(X+1)^2$.

Exercice 9. On cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$ et $P(0) = 0$.

a. Combien valent $P(1)$, $P(2)$, $P(5)$?

b. On pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Montrer que $P(u_n) = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. En déduire que $P = X$.

Exercice 10. On cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ non nuls tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$. On note j la racine troisième de l'unité de partie imaginaire strictement positive.

a. Déterminer les solutions constantes du problème.
On élimine ce cas pour la suite, et on considère une racine complexe z_0 de P.

b. Montrer que z_0^2 et $(z_0+1)^2$ sont racines de P.

c. En supposant que $|z_0| \neq 0$ et 1, montrer que P admet une infinité de racines.

d. En déduire que si P est solution du problème on a $|z_0| = 1$ ou $z_0 = 0$.

e. En déduire qu'on a alors également $|z_0 + 1| = 1$ ou $z_0 + 1 = 0$.

f. Montrer que si $z_0 = -1$ ou 0, alors 1 est racine de P, ce qui contredit le résultat de la question précédente.

g. Finalement, quelles sont les valeurs possibles pour z_0 ?
En déduire que P peut s'écrire sous la forme $\lambda(X-j)^k(X-j^2)^l$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et k, $l \in \mathbb{N}$.

h. En reportant dans l'équation de départ, montrer que les solutions du problème sont les polynômes $(X^2+X+1)^k$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $XP(X-1) = (X-2)P(X)$.

a. Montrer que 0 et 1 sont racines de P.

b. On suppose que P admet une racine $x \in \mathbb{C}$ *non entière.*
- Montrer que $x-1$ et $x+1$ sont aussi racines.
- Montrer que P admet une infinité de racines.
- En déduire que $P = 0$.

On suppose maintenant que P est non nul — il ne peut donc pas avoir de racine non entière.

c. Montrer comme à la question précédente que 0 et 1 sont les seules racines de P.

d. En déduire que P est de la forme $\alpha X^k(X-1)^l$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et k, $l \in \mathbb{N}^*$.

e. Quel est l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $XP(X-1) = (X-2)P(X)$?