Université de Caen
UFR de Sciences
Licence 1

1er semestre 2005-2006
Mathématiques
Approfondissement

FICHE D'EXERCICES N° 5
Polynômes : racines, irréductibilité

On utilise les abréviations suivantes :
- *DFI pour « décomposition en facteurs irréductibles » (et unitaires),*
- *PGCD pour « plus grand commun diviseur ».*

[*Racines et divisibilité.*]

Exercice 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme, et R le reste de la division euclidienne de P par X^2+1.

a. Montrer que $R(i) = P(i)$.

b. En déduire que X^2+1 divise P si et seulement si i est racine de P.

c. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le polynôme X^n+1 est-il multiple de X^2+1 ?

d. Le polynôme X^2+X+1 divise-t-il $X^{2004}-1$? $X^{2005}-1$?

Exercice 2. Soit $P = X^6+X^4$ et $Q = X^{25}-X+1$.

a. Montrer sans calcul que les racines communes de P et Q sont exactement les racines de leur PGCD.

b. Quelles sont les racines de P dans $\mathbb{C}$?

c. Montrer (presque) sans calcul que P et Q sont premiers entre eux.

[*Décomposition en facteurs irréductibles.*]

Exercice 3. Donner la DFI dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes suivants :

- $P_1 = (X^2+10X+21)(X^2+7X+13)$ [$= (X+3)(X+7)(X^2+7X+13)$]
- $P_2 = X^3-8X^2+13X$ [$= X(X-4-\sqrt{3})(X-4+\sqrt{3})$]
- $P_3 = 2X^3+X^2-X-2$ [$= 2(X-1)(X^2+3X/2+1)$]
- $P_4 = X^4-6X^2+25$ [$= (X^2-4X+5)(X^2+4X+5)$]
- $P_5 = X^4-16X^2+100$ [$= (X^2-6X+10)(X^2+6X+10)$]

Exercice 4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme quelconque, $Q_1 = X^4-6X^2-X+6$ et $Q_2 = X^4+10X^2-X+30$.

a. Montrer que $P(X)-X$ divise $P(P(X))-X$.

b. Montrer que Q_1 est de la forme $P(P(X))-X$ avec $P = X^2+a$ et a un réel à déterminer.

c. En déduire la DFI de Q_1 dans $\mathbb{R}[X]$. [$(X+2)(X-1)(X^2-X-3)$]

d. Trouver de même la DFI de Q_2 dans $\mathbb{R}[X]$. [$(X^2+X+6)(X^2-X+5)$]

Exercice 5. Soit $P = 2X^4-2X^3+3X^2-X+1$ et $Q = X^4-X^3+3X^2-2X+2$.

a. Calculer le PGCD de P et Q. [X^2-X+1]

b. Trouver la DFI dans $\mathbb{R}[X]$ de P et Q.
(Utiliser la question précédente.) [$P = (X^2-X+1)(2X^2+1)$, $Q = (X^2-X+1)(X^2+2)$]

[*Racines multiples.*]

Exercice 6. Soit $P = 2X^5+5X^4+8X^3+7X^2+4X+1$.

a. Calculer le PGCD de P et P'. [X^2+X+1]

b. Quelles sont les racines communes à P et P' ? Quelles sont les racines multiples de P ?

c. Montrer que $(X^2+X+1)^2$ divise P.

d. Donner la DFI de P dans $\mathbb{R}[X]$. [$2(X+1/2)(X^2+X+1)^2$]

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

a. Calculer $P'-P$.

b. Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

Exercice 8. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$.

a. On suppose que 1 est racine de P.
Montrer que $(X-1)^2$ divise P et calculer le quotient de P par $(X-1)^2$. $[(X-1)^2(X^2+(a+2)X+1)]$

b. On suppose que -1 est racine de P.
Montrer que $(X+1)^2$ divise P et calculer le quotient de P par $(X+1)^2$. $[(X+1)^2(X^2+(a-2)X+1)]$

[*Nombre de racines.*]

Exercice 9. On cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$ et $P(0) = 0$.

a. Combien valent $P(1)$, $P(2)$, $P(5)$?

b. On pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Montrer que $P(u_n) = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. En déduire que $P = X$.

Exercice 10. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $XP(X-1) = (X-2)P(X)$.

a. Montrer que 0 et 1 sont racines de P.

b. On suppose que P admet une racine $x \in \mathbb{C}$ *non entière*.
- Montrer que $x-1$ et $x+1$ sont aussi racines.
- Montrer que P admet une infinité de racines.
- En déduire que $P = 0$.

On suppose maintenant que P est non nul — il ne peut donc pas avoir de racine non entière.

c. Montrer comme à la question précédente que 0 et 1 sont les seules racines de P.

d. En déduire que P est de la forme $\alpha X^k (X-1)^l$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $k, l \in \mathbb{N}^*$.

e. Quel est l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $XP(X-1) = (X-2)P(X)$? $[k = l = 1]$