FICHE D'EXERCICES N° 2

Calculs de dérivées, accroissements finis, fontions usuelles

1) Tansformer en sommes de sinus et cosinus les produits suivants :

$$\cos(2x)\cos(x), \quad \cos(x)\sin(x)\cos(3x), \quad \sin(x)^3.$$

2) Montrer, en le calculant, que le nombre $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ est un entier.

3) Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, montrer qu'elles sont dérivables sur leur domaine de définition et calculer leurs dérivées.

- $f(x) = 5x^7 + 3x^3 - 4x^2 + 9x + 5$
- $g(x) = xe^x$
- $h(x) = \dfrac{6x+5}{x^2+1}$
- $i(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$
- $j(x) = \sin(x)\log(x)$
- $k(x) = \sqrt{\sqrt{1+x^2}}$
- $l(x) = \dfrac{6\sin x + 5}{(\sin x)^2 + 1}$
- $m(x) = \left(1/\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$

4) Posons $f(x) = x^{x+x^{-1}}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f ainsi définie sur $\mathbb{R}_+$ est-elle continue ? dérivable ? Sa dérivée est-elle continue ? *(La dernière question est assez calculatoire.)*

5) Rappelons que l'on note E la fonction « partie entière ».
Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 1 ?
- $f(x) = E(x)^2$
- $g(x) = (x-1)E(x)$
- $h(x) = (x-1)^2E(x)$

6) On pose $f(x) = (x - E(x))\sin\dfrac{\pi x}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que f est périodique et en déterminer une période.
b. Déterminer l'ensemble des entiers n tels que f est continue en n.
c. En quels entiers f est-elle dérivable ?

7) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

a. Montrer que $\frac{f(\sin x)}{x}$ a une limite quand x tend vers 0 et calculer cette limite.
b. Soit n un entier naturel, montrer que $\lim_{x\to 1} \frac{f(x^n-1)-f(x-1)}{x-1}$ existe et la calculer.
c. Montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)^2-f(3x^2)}{x^2}$ existe et la calculer.

Rappel. On dit que les graphes de deux fonctions sont *tangents* en un point s'ils se coupent en ce point et y ont la même tangente.

8) On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ on a $\log x < x - 1$.
On pose $u(x) = x^e$ et $v(x) = e^x$ pour $x > 0$.

a. Comparer u et v sur $\mathbb{R}_+^*$. *(On pourra prendre le* log *puis poser* $y = x/e$.*)*
b. Montrer que les graphes de u et v sont tangents en un unique point.
c. Représenter ces graphes et leur tangente commune sur un dessin.

9) Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.

a. Montrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est tangente à $\mathcal{P}$ si et seulement si $4b + a^2 = 0$.
b. Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites tangentes à $\mathcal{P}$ de pentes $a_1 \neq a_2$.
Déterminer en fonction de a_1 et a_2 les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
c. Montrer que deux tangentes à $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires **ssi** elles se coupent sur la droite $y = -1/4$.

10) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 10x + 9$.

a. Calculer $f(2)$, $f(-3)$ et f'.

b. Montrer que l'équation $6x^2 + 8x - 10 = 0$ admet une solution dans l'intervalle $]-2, 3[$.

c. Peut-on calculer cette solution ?

On s'intéresse maintenant à $g : x \mapsto e^{\sqrt{x}} \sin(x)$, définie sur $\mathbb{R}_+$.

d. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $g(x) = 0$. Calculer g'.

e. Montrer que l'équation $\sin(x) = -2\sqrt{x}\cos(x)$ a une solution *non nulle* dans $[0, 4]$.

f. Peut-on calculer cette solution ?

11) Soit P une fonction polynômiale de la forme $P(x) = x^n + ax + b$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

a. Combien l'équation $P'(x) = 0$ a-t-elle de solutions ? *(On discutera selon la parité de n et le signe de a.)*

b. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable s'annulant en k points distincts, avec $k \geq 2$.
Montrer que f' s'annule en au moins $k - 1$ points distincts.

c. Montrer que P a au plus deux racines réelles si n est pair, et au plus trois si n est impair.

12) Soit a un réel et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$. On souhaite démontrer l'existence de $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

a. Quel théorème du cours cela vous rappelle-t-il ?

On définit $g : [0, e^{-a}] \to \mathbb{R}$ en posant $g(0) = f(a)$ et $g(x) = f(-\log x)$ pour $x \in]0, e^{-a}]$.

b. Montrer que g est continue sur $[0, e^{-a}]$ et dérivable sur $]0, e^{-a}[$.
Calculer g' et comparer $g(0)$ et $g(e^{-a})$.

c. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Question subsidiaire :

d. Trouver une fonction intermédiaire qui permet de démontrer le résultat analogue pour $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

13) Soit $a < b$ deux réels distincts. Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on note $\mathcal{G}_f$ le graphe de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note P_x le point de coordonnées $(x, 0)$.

a. On prend $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = x(x - 1)$. En particulier $f(a) = f(b) = 0$. Tracer $\mathcal{G}_f$.
Tracer, lorsque c'est possible, une tangente à $\mathcal{G}_f$ passant par $P_{-\frac{1}{2}}$, $P_{\frac{1}{2}}$, P_3.

On veut maintenant montrer que *pour toute fonction dérivable f telle que* $f(a) = f(b) = 0$, et *pour tout* $c \notin [a, b]$, on peut trouver une tangente à $\mathcal{G}_f$ passant par P_c.

b. On suppose f dérivable sur $[a, b]$. Soit $x_0 \in [a, b]$.
Montrer que la tangente à $\mathcal{G}_f$ en $(x_0, f(x_0))$ passe par P_c si et seulement si $f'(x_0)(x_0 - c) - f(x_0) = 0$.

c. On suppose de plus que $f(a) = f(b) = 0$.
Trouver une fonction simple dont la dérivée *ressemble* à $f'(x)(x - c) - f(x)$ et qui s'annule en a et b.
Conclure en utilisant le théorème de Rolle.

d. À quel moment a-t-on utilisé le fait que $c \notin [a, b]$? Que se passe-t-il si $c = a$?

Application :

e. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = e^{\cos(2x)} \sin(x)$.
Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$ on peut trouver une tangente à $\mathcal{G}_f$ passant par P_c.

14) On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $R_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a les inégalités $\dfrac{1}{x+1} < \log(x + 1) - \log x < \dfrac{1}{x}$.

b. Déduire de la question précédente l'encadrement $\log n \leq H_n \leq \log n + 1$.

c. Montrer que pour tout réel $x \geq 1$ on a $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \dfrac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$.

d. Déduire de la question précédente la partie entière de R_{n^2}.

15) Soit a et b deux réels.

a. Montrer qu'il existe un réel c tel que $a^3 - b^3 = 3c^2(a-b)$. *(Utiliser le théorème des accroissements finis.)*

b. En déduire que $a^2 + ab + b^2$ est positif, et nul si et seulement si $a = b = 0$.

Rappel. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *bornée* s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq K$ pour tout $x \in I$.

16) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' est bornée.

a. Montrer qu'il existe un réel $K \geq 0$ tel que $|f(x) - f(0)| \leq K|x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Expliquer pourquoi on peut choisir $K \geq |f(0)|$.

b. En déduire que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{1+|x|}$ est bornée.