Licence 1 **2006-2007**
Mathématiques **EM11**
Groupe A

Devoir Maison

Corrigé

Exercice 1.

a. Au rang $k = 0$ la propriété à démontrer s'écrit $(1 + a)^0 \geq 1$, ce qui est vrai car $x^0 = 1$ pour tout $x > 0$. Cela initialise la récurrence. Supposons que la propriété est vraie au rang k. En multipliant des deux cotés par $(1 + a)$, qui est positif, on peut écrire :

$$(1 + a)^{k+1} \geq (1 + a)(1 + ka) = 1 + (k + 1)a + ka^2 \geq 1 + (k + 1)a.$$

Cela démontre la propriété au rang $(k + 1)$ et donc, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b. On utilise la formule de sommation pour les suites géométriques :

$$a \sum_{k=0}^{n-1} (1 + a)^k = a \ \frac{(1 + a)^n - 1}{(1 + a) - 1} = (1 + a)^n - 1.$$

c. On utilise d'abord la formule du b., puis l'inégalité du a. pour chaque terme de la somme :

$$(1 + a)^n = 1 + a \sum_{k=0}^{n-1} (1 + a)^k \geq 1 + a \sum_{k=0}^{n-1} (1 + ka) = 1 + an + a^2 \sum_{k=0}^{n-1} k.$$

On finit en utilisant la formule donnant la somme des $(n - 1)$ premiers entiers, et la positivité de a :

$$(1 + a)^n \geq 1 + an + a^2 \frac{n(n - 1)}{2} \geq 1 + \frac{n(n - 1)}{2} a^2.$$

d. On applique la question précédente en prenant $a = \sqrt{2/n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(1 + \sqrt{2/n})^n \geq 1 + \frac{n(n - 1)}{2} \ \frac{2}{n} = 1 + (n - 1) = n \geq 1.$$

La fonction $(x \mapsto \sqrt[n]{x})$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut l'appliquer aux trois termes de cet encadrement, ce qui donne le résultat voulu.

e. On a

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \sqrt{2/n}) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

donc, d'après le théorème des gendarmes et l'encadrement obtenu à la question précédente, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Exercice 2.

a. Rappelons la définition de « $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D}} f(x) = l$ » :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \alpha > 0 \ \ \forall x \in D \ \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Cette définition se lit de la manière suivante : « pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que : pour tout $x \in D$, si $|x - x_0| < \alpha$ alors $|f(x) - l| < \varepsilon$ ».
L'objet de cette définition est d'exprimer l'idée « pour que $f(x)$ soit proche de l il suffit que x soit proche de x_0 », en quantifiant la notion de « proximité ». Plus précisément, l'inégalité $|x - x_0| < \alpha$ signifie que la *distance* entre x et x_0 est strictement inférieure à α : on dit alors que x est α-proche de x_0.
Dans la définition, ε et α sont donc à comprendre comme des distances, et on peut lire la définition comme suit : « pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un $\alpha > 0$ tel que (x α-proche de $x_0 \Longrightarrow f(x)$ ε-proche de l) ».

b. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On applique la définition des limites suivantes avec $\varepsilon/2$ à la place de ε :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = l \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} g(x) = m.$$

On peut ainsi trouver $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - l| < \varepsilon/2$ dès que $|x - x_0| < \alpha$, et on peut trouver $\beta > 0$ tel que $|g(x) - m| < \varepsilon/2$ dès que $|x - x_0| < \beta$. Posons $\gamma = \min(\alpha, \beta)$. Pour tout $x \in D$ tel que $|x - x_0| < \gamma$, on peut appliquer les deux inégalités précédentes, et de plus l'inégalité triangulaire :

$$|(f+g)(x) - (l+m)| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Cela montre que la définition de « $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} (f+g)(x) = l + m$ » est vérifiée.

c. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On a $m \in \left]-|m|-1, |m|+1\right[$ et $g(x)$ tend vers m quand x tend vers x_0 donc, d'après une proposition vue en cours, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que $g(x) \in \left]-|m|-1, |m|+1\right[$ pour tout $x \in D$ tel que $|x - x_0| < \alpha_1$ — en particulier on a alors $|g(x)| < |m| + 1$.
On applique maintenant la définition de la limite à l avec $\varepsilon/2(|m|+1)$, et à m avec $\varepsilon/2(|l|+1)$: il existe $\alpha_2 > 0$ tel que $|f(x) - l| < \varepsilon/2(|m|+1)$ pour tout $x \in D$ tel que $|x - x_0| < \alpha_1$, et il existe $\alpha_3 > 0$ tel que $|g(x) - m| < \varepsilon/2|l|$ pour tout $x \in D$ tel que $|x - x_0| < \alpha_3$.
On pose finalement $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Pour $x \in D$ tel que $|x - x_0| < \alpha$, les trois inégalités ci-dessus sont vérifiées et on peut écrire, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - lm| = |(f(x) - l)g(x) + (g(x) - m)l| &\leq |f(x) - l| \times |g(x)| + |g(x) - m| \times |l| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)} (|m|+1) + \frac{\varepsilon}{2(|l|+1)} |l| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Cela montre que la définition de « $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} (f \times g)(x) = lm$ » est vérifiée.