Université de Caen — **2006-2007**
UFR de Sciences — **L2 MASS**
Mathématiques — **EMA 43**

Partiel n° 5

lundi 30 avril 2007

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

durée : 2 heures
Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

Exercice 1. Pour tout nombre réel a on considère la forme quadratique $q_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$q_a(x, y, z) = a(x^2 + y^2) + 2z^2 - 2xy - 2xz + 2yz.$$

1. On se place dans le cas $a = 1$.
   a. Montrer que q_1 est positive mais pas définie-positive.
   b. Montrer que $q_1(x, y, z) \geq z^2$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   c. Trouver un vecteur $v = (x, y, z)$ non nul tel que $q_1(x, y, z) = 0$.
2. On reprend le cas général.
   a. En utilisant la question 1b, montrer que q_a est définie-positive lorsque $a > 1$.
   b. Calculer $q_a(v)$ pour tout a, où v est le vecteur trouvé à la question 1c.
   c. Pour quelles valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ la forme quadratique q_a est-elle définie-positive ?
3. On se place dans le cas $a = 2$.
   La forme quadratique q_2 est définie-positive, on munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire associé.
   a. Donner l'expression du produit scalaire $u \cdot u'$ pour $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$.
   On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et P l'orthogonal de e_3.
   b. Écrire l'équation de P. Donner une base de P.
   c. Déterminer une base orthonormale de P.
   d. Déterminer le projeté orthogonal de e_1 sur P.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
On définit une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ en posant

$$g(x, y) = f(u, v), \quad \text{avec} \quad u = xy \quad \text{et} \quad v = \frac{y}{x}.$$

1. Montrer que g est de classe C^1.
2. Calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
3. On fixe $(x, y) \in E^2$. Montrer qu'on a $x\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = y\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y)$ si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial v}\Big(xy, \dfrac{y}{x}\Big) = 0$.

Exercice 3. Pour tout réel strictement positif α on considère la fonction $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$f_\alpha(x, y) = |xy|^\alpha \quad \text{pour} \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

Notons par ailleurs $h_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $h_\alpha(t) = |t|^\alpha$ pour $t \neq 0$ et $h_\alpha(0) = 0$. On rappelle que h_α est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha > 1$.

1. On fixe $\alpha > 0$. La fonction h_α est-elle continue en 0 ? La fonction f_α est-elle continue en $(0, 0)$? Justifier.
2. Montrer que f_α admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0, 0)$, pour tout $\alpha > 0$.
   Calculer ces dérivées partielles.
3. On suppose que $\alpha > 1$. Montrer que f_α est différentiable en $(0, 0)$, sans revenir à la définition.
4. On suppose que $\alpha > \frac{1}{2}$. Montrer grâce à la définition que f_α est différentiable en $(0, 0)$.
5. On suppose que $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Montrer que f_α n'est pas différentiable en $(0, 0)$.
   On pourra pour cela considérer le comportement de f_α sur la droite $y = x$.