Université de Caen — **2006-2007**
UFR de Sciences — **L2 MASS**
Mathématiques — **EMA 43**

Partiel n° 6

lundi 14 mai 2007

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage <u>après</u> la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

durée : 2 heures
Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

Exercice 1. Soit a un nombre réel fixé, et M la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 4a+5 & 4a-4 & 2-2a \\ 4a-4 & 4a+5 & 2-2a \\ 2-2a & 2-2a & a+8 \end{pmatrix}.$$

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.
On considère l'endomorphisme de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $N = \dfrac{1}{9}M$.

1. On se place dans le cas $a = 0$.
   a. Montrer que f est une projection.
   b. Sans calcul, dire pourquoi f est une projection orthogonale.
   c. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
   d. Déterminer une équation de $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$, puis de $\operatorname{Im} f$.
   e. Donner, sans calcul mais en justifiant, le polynôme caractéristique de f.

On revient au cas général.

2. Montrer sans calcul que f est diagonalisable.
3. Calculer le coefficient de M^2 situé à l'intersection de la première ligne et de la première colonne.
4. À l'aide de la question précédente, donner une condition nécessaire sur a pour que f soit :
   – une projection,
   – une symétrie.
5. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f est :
   – une projection orthogonale différente de l'identité,
   – une symétrie orthogonale différente de l'identité,

Exercice 2. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0.$$

1. Calculer les dérivées partielles de f par rapport à x et y sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0,0)$, et les calculer.
3. Montrer que les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existent, et les calculer.
4. L'application f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie comme suit :

$$f(x,y) = (x + e^y, x - y).$$

1. Montrer que l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t + e^t$ est bijective.
   On tracera pour cela le tableau de variations de h, en y faisant figurer les limites en $\pm\infty$.
2. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bijective.

On note g l'application réciproque de f.

3. Montrer que f est de classe C^1 et calculer sa matrice jacobienne en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
4. Montrer que g est de classe C^1.