Feuille n° 3

Exercice 1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans $\mathcal{B}$ par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. On pose $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 + e_3$, $e'_3 = e_1 + e_2$. Écrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
b. Calculer A'^n pour tout n.
c. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et donner une formule pour A^n en fonction de P.
d. Calculer les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ du vecteur $u = e_1 + e_2 + e_3$.
e. Calculer les coordonnées dans la base canonique du vecteur $f^n(u)$.
f. *Question subsidiaire :* Calculer P^{-1}, puis A^n pour tout n.

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de f.
b. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Exercice 3. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$.
b. Montrer sans calcul que $A^4 = I_4$.
c. Calculer A^n pour tout n.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. On se propose de chercher les matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

a. Déterminer les valeurs propres de A et une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
b. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique, et $g \in L(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$.
   (i) Montrer que $g \circ f = f \circ g$.
   (ii) En déduire que les vecteurs propres de f sont aussi des vecteurs propres pour g.
   (iii) Quelles possibilités a-t-on pour les valeurs propres associées ?
c. Combien l'équation $B^2 = A$ a-t-elle de solutions dans $M_3(\mathbb{R})$?
   Donner ces solutions.

Exercice 5. On considère deux suites (u_n), (v_n) définies par les valeurs $u_0 = 7$, $v_0 = 4$ et le système de récurrence suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 11u_n - 18v_n \\ v_{n+1} & = & 6u_n - 10v_n. \end{array}\right.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Trouver une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que le système ci-dessus s'écrive $X_{n+1} = AX_n$.

b. Trouver une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

On pose $Y_n = P^{-1}X_n$ et on appelle w_n, x_n ses composantes : $Y_n = P^{-1}X_n = \binom{w_n}{x_n}$.

Dans cet exercice on n'a pas besoin de calculer P^{-1}.

c. Déterminer w_0 et x_0 en résolvant un système linéaire.

d. Montrer que la suite (Y_n) vérifie l'équation de récurrence $Y_{n+1} = DY_n$.
En déduire deux équations de récurrence simples vérifiées par w_n et x_n.

e. Calculer u_n et v_n pour tout n.

Exercice 6. Déterminer les suites (u_n), (v_n), (w_n) données par $u_0 = -3$, $v_0 = 1$, $w_0 = 0$ et

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -u_n \\ v_{n+1} & = & u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} & = & 3u_n + 2w_n. \end{array}\right.$$