Feuille n° 5

Exercice 1. Soit a un nombre réel, et soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) - 2xy + 2xz + 2yz \quad \text{pour tout vecteur} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

a. On suppose que $a = 0$. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $v = (2, 2, 1)$.
Trouver une base de $D^\perp$. Les sous-espaces vectoriels D et $D^\perp$ sont-ils supplémentaires ?

b. Montrer que la forme quadratique q est définie positive si et seulement si $a > 2$.

c. On suppose que $a = 4$. Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $9x - y + 6z = 0$. Trouver une base de $P^\perp$.

Exercice 2. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par la formule

$$q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + z^2 + 2xy + 4yz.$$

a. Montrer que q est une forme quadratique en donnant l'expression de la forme bilinéaire φ associée.

b. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
Dans la suite de l'exercice on munit $\mathbb{R}^3$ de ce produit scalaire.

c. Calculer les quantités $\|(0, 0, 1)\|$, $\|(-2, 1, -2)\|$ et $(0, 0, 1) \cdot (-2, 1, 0)$.
Donner l'équation du plan P orthogonal au vecteur $(0, -1, 2)$.

d. Trouver une base de P, puis une base orthonormale de P.

e. À l'aide des question précédentes, et sans calcul, donner une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + 16z^2 - 4xy + 6xz - 16yz.$$

a. Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée à q est un produit scalaire.

b. Orthonormaliser la base canonique.

c. Donner l'équation du plan orthogonal au vecteur $(0, 1, 2)$.

Exercice 4. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$.

a. Montrer que la forme bilinéaire associée à q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
Calculer les quantités suivantes : $\|(0, 0, 1)\|$, $\|(3, 1, 0)\|$, $(3, 1, 0) \cdot (-4, 0, 1)$, $\|(0, 4, 3)\|$.

b. Orthonormaliser la base canonique (e_1, e_2, e_3).
Soit P l'orthogonal du vecteur $e_1 + e_2$. Trouver une base orthonormale de P.

c. Soit Q l'orthogonal du vecteur e_3.
   (i) Écrire l'équation de Q.
   (ii) Trouver une base de Q, puis une base orthonormale de Q.
   (iii) Donner une base orthonormale (v_1, v_2, v_3) de $(\mathbb{R}^3, q)$ telle que $Q = \text{Vect}(v_2, v_3)$.

Exercice 5. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$.

a. Montrer que la forme bilinéaire associée à q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
Orthonormaliser la base canonique (e_1, e_2, e_3).

b. Soit P le plan orthogonal au vecteur $(1, 1, 0)$. Quel est le projeté orthogonal de e_1 sur P ?

c. Calculer les coordonnées des projetés orthogonaux de e_2 et e_3 sur P.

d. Écrire la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P.
Est-elle symétrique ? Pourquoi ? Quelles sont ses valeurs propres ?

Exercice 6. On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel. Soient u_1, u_2, u_3, u_4 les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définis par

$$u_1 = (2,1,0,2), \quad u_2 = (0,1,0,1), \quad u_3 = (2,1,3,1), \quad u_4 = (1,1,1,1).$$

a. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
b. Orthonormaliser la base (u_1, u_2, u_3, u_4) selon le procédé de Gram-Schmidt.
c. Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs u_1 et u_2.
Trouver la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P.

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que f est une projection dont on déterminera l'image et le noyau.
b. f est-elle une projection orthogonale pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$?
c. Montrer que la forme quadratique suivante définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$:

$$q(x,y,z) = x^2 + 11y^2 + 6z^2 - 6xy + 2xz - 2yz.$$

d. Montrer que f est une projection orthogonale si on munit $\mathbb{R}^3$ de ce produit scalaire.
e. Donner une autre forme quadratique q pour laquelle ce résultat reste valable.

Exercice 8. Soient n un entier positif et $E = \mathbb{R}[X]_n$. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.
Calculer $||X - \frac{1}{2}||$ et $(2X-1) \cdot X^2$.
b. Montrer qu'il existe un unique polynôme $H \in E$ tel que

$$\forall\ P \in E \quad \int_0^1 H(t)P(t)\mathrm{d}t = P'(0).$$

c. On considère le cas $n = 2$.
(i) Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ selon le procédé de Gram-Schmidt.
(ii) Calculer le polynôme H.

Exercice 9. Soit E un espace euclidien.
a. Montrer que pour tous $u,\, v \in E$, on a l'égalité

$$2\,(u \cdot v) = \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2.$$

b. En déduire que pour tous $u,\, v \in E$, on a l'*égalité de la médiane* :

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

c. En déduire par ailleurs que pour tous $u,\, v \in E$ on a

$$u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Exercice 10. Pour tout nombre réel a on s'intéresse à la forme quadratique q_a sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q_a(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + 2z^2 + a^2z^2 + 4xy - 2ayz.$$

a. Montrer que q_a est définie-positive, pour tout $a \in \mathbb{R}$.
b. Déterminer pour tout $a \in \mathbb{R}$ un vecteur directeur de l'orthogonal au plan d'équation $z = 0$.