Feuille n$^{\text{o}}$ 3

Exercice 1. On rappelle qu'une fonction polynômiale $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue, et que la composée, la somme et le produit de deux fonctions continues sont continus. Montrer de façon détaillée que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$:

a. $f(x,y) = xy + 2x^2y^2 - y^3$
b. $f(x,y) = \sin(x) + x^2$
c. $f(x,y) = \cos(xy^2) + \exp(2xy^2)$
d. $f(x,y) = \ln(2 + x^2 + y^2) + \exp(xy)$
e. $f(x,y) = \cos(x)\sin(y^2)$

Exercice 2. Représenter les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ puis dire s'ils sont ouverts, fermés, ou ni l'un ni l'autre, en justifiant :

a. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$
b. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$
c. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2\}$
d. $([2,3] \cup \{0\}) \times [-1,1]$
e. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ et } y = \frac{1}{x^2}\}$
f. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - xy > 0\}$
g. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x^2 + y^2) \geq 0\}$
h. $\mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$
i. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1,\ y \leq 2 \text{ et } x - y \geq 0\}$
j. $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
k. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1,0)\}$
l. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 - (x^2 + y^2) = 0\}$

Montrer que le dernier ensemble est encore fermé lorsqu'on lui enlève le point $(0,0)$.

Exercice 3. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils ouverts, fermés, ou ni l'un ni l'autre ?

a. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y^2 + z^3 > 1\}$
b. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sin(xyz) \in \left]0, \tfrac{1}{2}\right]\}$
c. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^{x+y+z} \in \mathbb{Z} < 2\}$
d. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sin(x) + \cos(yz) < 0\}$
e. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 > y^2 \text{ et } z \geq 0\}$

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geq \dfrac{x^2}{n}\right\}$.

a. Montrer que A_n est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
b. Soit $A = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$. Montrer que A n'est ni fermé ni ouvert.

Exercice 5. Soit $P = (a,b)$ un point de $\mathbb{R}^2$ et $r \geq 0$. On note $B(P,r)$ la boule ouverte de centre P et rayon r, et $\bar{B}(P,r)$ la boule fermée :

$$(x,y) \in B(P,r) \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2,$$
$$(x,y) \in \bar{B}(P,r) \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2.$$

a. Expliciter les ensembles $\mathcal{O} = \bigcup_{r>0} B((0,r),r)$ et $\mathcal{O}' = \bigcup_{r>0} \bar{B}((0,r),r)$.
b. Déterminer la nature de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$: ouvert, fermé ou ni l'un ni l'autre.

Exercice 6. Pout tout point $P \in \mathbb{R}^2$ et tout $r > 0$ on note $B(P,r)$ la boule ouverte de centre P et rayon r, et $\bar{B}(P,r)$ la boule fermée.

a. Montrer que $\bigcap_{\varepsilon>0} B(0, 1+\varepsilon) = \bar{B}(0,1)$.
b. Montrer que $\bigcup_{\varepsilon>0} \bar{B}(0, 1-\varepsilon) = B(0,1)$.
c. Soit (ρ_n) une suite strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ non majorée.
Déterminer $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(0,\rho_n)$ et $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(0,\rho_n)$. Que se passe-t-il si (ρ_n) est majorée ?

Exercice 7. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}.$$

a. Soit $P_0 = (x_0, y_0) \in A$.
Trouver un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre P_0 et rayon r soit incluse dans A.

b. Soit $P_n = (x_n, y_n)$ une suite de points de B qui convergent vers un point $P = (x,y)$ de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que P appartient à B.

c. A et B sont-ils ouvert, fermé, ou ni l'un ni l'autre ?
Le redémontrer à l'aide d'images réciproques.

Exercice 8. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}^2$. On définit $A + B$ par

$$A + B = \{x + y \mid (x,y) \in A \times B\}.$$

a. On suppose que A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $A + B$ est ouvert.
Indication : soit $z = x + y \in A + B$, on cherchera une boule ouverte de centre z incluse dans $A + B$.

b. On suppose que A est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que B est fini. Montrer que $A + B$ est fermé.
Indication : on écrira $A + B$ comme une réunion de fermés.

c. Si B est fini, il est en particulier fermé. Le résultat de la question précédente est-il toujours vrai si on suppose seulement que A et B sont fermés ?

Exercice 9. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note

$$C(U) = \{\lambda u \mid u \in U,\ \lambda > 0\}.$$

a. Représenter $C(U)$ dans les cas suivants :

$$U =]1,2[\times]1,2[\ ; \quad U =]-1,1[\times]-1,1[\ ; \quad U = \mathbb{R} \times]1,2[.$$

b. Montrer que $C(U)$ est ouvert.

c. Montrer que $C(U) = \mathbb{R}^n$ si et seulement si $0 \in U$.

Exercice 10. On pose $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}$ et $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ pour $(x,y) \neq 0$.

a. Dessiner E.

b. Montrer que pour tout $(x,y) \in E$ on a $|x| \leq 2$ et $|y| \leq 2$.
En déduire que E est borné, puis compact.

c. Montrer que f est bien définie et continue sur E.
Montrer que $f : E \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

d. Calculer le maximum et le minimum de f sur E.

Exercice 11. On définit des fonctions continues f, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par les formules

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad g(x,y) = x^2 - y^2.$$

a. Montrer que l'image réciproque de $[0,1]$ par f est bornée, mais pas celle de $[0,1]$ par g.

b. Exprimer sous forme d'intervalles les images directes de la boule ouverte $B(0,1)$ par f et g.

c. Montrer par des exemples que l'image réciproque d'un compact par une application continue peut être compacte ou non compacte.

d. Montrer par des exemples que l'image directe d'un ouvert par une application continue peut être ouverte ou non ouverte.

e. Soit A une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application continue.
Montrer que $f(A)$ et $f^{-1}(A)$ sont fermées.

Exercice 12. Montrer que l'ensemble de nombres réels suivant est borné :

$$Y = \left\{x + e^{y^2} \;\middle|\; x,\, y \in \mathbb{R},\ \ 1 - e^{-x^2} \leq y \leq e^{-x^2}\right\}.$$

On pourra commencer par montrer que le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^2$ est compact :

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 - e^{-x^2} \leq y \leq e^{-x^2}\right\}.$$