Université de Caen
UFR de Sciences
L2 MASS

2e semestre 2006-2007
Mathématiques
Analyse

Feuille n° 5

Exercice 1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme suit est continue sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $(0,0)$.
On pourra commencer par montrer que $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ *et* $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ *pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

L'application f est-elle continue en $(0,0)$? *On pourra calculer* $f(x,x)$ *pour* $x \neq 0$.
Qu'en est-il si on pose $f(0,0) = \frac{1}{2}$ au lieu de 0 ?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, puis sur toute droite passant par $(0,0)$.
Faire tendre (x,y) vers $(0,0)$ sur la parabole d'équation $y = x^2$. L'application f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 5. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique, et $\mathbb{R}$ de la norme usuelle. Soit n un entier positif, et soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{xy^n}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

a. Montrer que pour tous entiers $p,\, q \in \mathbb{N}$ et tous réels $x,\, y \in \mathbb{R}$ on a $|x^p y^q| \leq (x^2+y^2)^{\frac{p+q}{2}}$.
b. On suppose que $n > 1$. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
c. On suppose que $n = 1$. Montrer que la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$ entier.

Exercice 6. On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\ln(1+x^2+y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Soit α un paramètre réel fixé et $\mathcal{D}_\alpha$ la droite d'équation $y = \alpha x$ dans $\mathbb{R}^2$.

b. Trouver deux suites (x_n), (y_n) qui tendent vers 0 et telles que $(x_n, y_n) \in \mathcal{D}_\alpha$ pour tout n.
c. Calculer la limite de la suite $(f(x_n,y_n))$, si elle existe.
On rappelle que $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$.
d. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Peut-on modifier sa valeur en $(0,0)$ pour la rendre continue ?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(1 + x^2 + y^2\right) \dfrac{\sin y}{y} & \text{si } \; y \neq 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } \; y = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
On introduira la fonction « $\frac{\sin t}{t}$ » de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de l'application

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(xy) - 1}{x^2y^2} & \text{si } \; xy \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 9. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel fixé, et $\varphi_1 :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$, $\varphi_2 : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$. On définit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $\varphi(t) = \varphi_1(t)$ si $t \leq a$ et $\varphi(t) = \varphi_2(t)$ si $t \geq a$.

a. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \ln(2 - e^{x+y}) \;\text{ si }\; x + y \leq 0 \quad \text{et} \quad f(x+y) = \sin(x+y) \;\text{ si }\; x + y > 0.$$