Université de Caen
UFR de Sciences
L2 MASS

2e semestre 2006-2007
Mathématiques
Analyse

Feuille n° 6

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par les expressions suivantes :

$$f_1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\,; \qquad f_2(x,y) = \mathrm{Log}(x+\sqrt{x^2+y^2})\,; \qquad f_3(x,y) = \mathrm{Log}(\tan\frac{x}{y})\,;$$
$$f_4(x,y) = (xy)^z\,; \qquad f_5(x,y) = \frac{xy^2}{x+y}\,; \qquad f_6(x,y) = \mathrm{Log}(1+\frac{y}{x}).$$

Exercice 2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \sin(x + g(y^2, x)).$$

Montrer que f est de classe C^1 et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de g.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x,y,z) = f(x^2-y^2, y^2-z^2, z^2-x^2).$$

Montrer que g est de classe C^1 et que pour tout réel t on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,t,t) + \frac{\partial g}{\partial y}(t,t,t) + \frac{\partial g}{\partial z}(t,t,t) = 0.$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = x^{y^z}$.

a. Montrer que la fonction f est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de f.

b. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = x^{x^x}$.
Montrer que g est dérivable et calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = |x|\sin(x^2+y)$.

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. En quels points de $\mathbb{R}^2$ la fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x ? à y ?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$, que l'on calculera.
Est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 7. Montrer à l'aide la définition que les applications suivantes sont différentiables en tout point :

$$f_1 : (x,y) \mapsto y + xy^2, \quad f_2 : (x,y,z) \mapsto x^2 + xy + z^2.$$

Expliciter la différentielle de f_1 en $(1,0)$ et celle de f_2 en $(1,0,1)$.
Indication : si p et q sont deux entiers tels que $p+q \geq 2$, alors $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^p k^q}{\|(h,k)\|} = 0$.

Exercice 8. Montrer, en calculant des dérivées partielles, que les applications suivantes sont différentiables :

$$f_1(x,y) = \ln(1+x^2+y^2), \quad f_2(x,y,z) = \cos(xy) + x\sin(z).$$

Expliciter la différentielle de f_1 en $(1,0)$ et celle de f_2 en $(1,0,\frac{\pi}{2})$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer successivement :

- que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et calculer ses dérivées partielles,
- que f admet l'application linéaire nulle comme différentielle en $(0,0)$,
- que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, sachant que $|\sin t| \leq |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en explicitant ses dérivées partielles.

c. Montrer que f admet des dérivées partielles nulles en $(0,0)$.

d. Quelle relation vérifierait $f(x,x)$ si f était différentiable en $(0,0)$?
Déterminer $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t}$ et en déduire que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 11. On pose $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ et on définit une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } (x,y) \in U \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin U. \end{cases}$$

a. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que f est de classe C^1 sur U.

b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

c. Montrer que f a des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

d. Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.

e. Montrer que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = |x^3 - y^3|^{2/3}$.

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. Soit $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 > 0\}$ et $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 < 0\}$.

   (i) Montrer que U_1 et U_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

   (ii) Montrer que g est de classe C^1 sur U_1 et U_2.

c. Montrer que g n'est pas différentiable en $(1,1)$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^3 - \sin y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et les calculer.

c. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x)$ pour tout $x \neq 0$ et en déduire que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

d. En considérant $f(x,-x)$, montrer que f n'est même pas différentiable en $(0,0)$.