Feuille n° 7

Exercice 1. Calculer les matrices hessiennes des applications suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:

$$f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2), \quad g(x,y,z) = x^2+3y^2-z^2+2xy-5yz, \quad h(x,y) = x^3y^2+\cos(xy).$$

Que peut-on remarquer sur ces exemples ? Démontrer que c'est un fait général.

Exercice 2. Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :

$$f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \arctan\frac{y}{x},$$
$$g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \ln((x-a)^2+(y-b)^2).$$

Exercice 3. Soit $u : \mathbb{R}^* \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $u(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et posons $F = f \circ u$.

a. Montrer que F est de classe C^2 et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.

b. Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial r}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$, r et θ.

c. Établir l'expression suivante du laplacien en coordonnées polaires :

$$(\Delta f)(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta).$$

d. On prend $f(x,y) = x^2 - y^2$. Montrer que f est harmonique. Que vaut F dans ce cas ?

e. Montrer plus généralement — et directement — que les fonctions $F(r,\theta) = r^k\cos(k\theta)$ des coordonnées polaires (r,θ) sont harmoniques, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x,y) = (x^2+y^2, xy) \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que $g \circ f$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de $g \circ f$ en fonction des dérivées partielles de g.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les calculer.

c. f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sur $\mathbb{R}^2$ et en déduire que f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.