Université de Caen
UFR de Sciences
L2 MASS

2e semestre 2006-2007
Mathématiques
Analyse

Feuille n° 8

Exercice 1. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (e^x - e^y, x + y).$$

a. Soit $a > 0$ et b deux réels fixés.
Montrer que l'équation $t - at^{-1} = b$ admet une unique solution t dans $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
On appelle g la fonction réciproque.

c. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et écrire sa matrice jacobienne.

d. Montrer que g est de classe C^1.

Exercice 2. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta).$$

a. Soit $r \neq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ contenant (r, θ) et tel que f est injective sur U.

b. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il n'existe pas d'ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ contenant $(0, \theta)$ et tel que f soit injective sur U.

c. Trouver un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ tel que f soit injective sur $\mathbb{R}^* \times I$.

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x + y, xy).$$

a. Soit u et v deux réels fixés. On considère le système : $x + y = u$, $xy = v$.
À quelle condition sur u et v ce système admet-il une solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $|x| \neq |y|$?

b. Montrer que f est injective sur l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < |x|\}$ et déterminer $V = f(U)$.

c. Montrer que f définit un C^1-difféomorphisme entre U et V.

Exercice 4. On considère la courbe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ définie par l'équation $x^3 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0$.

a. Vérifier que le point $A = (1, 1)$ appartient à $\mathcal{C}$.

b. Montrer qu'autour de A la courbe coincide avec le graphe d'une fonction g et déterminer $g'(1)$.

c. Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

Exercice 5. On considère la courbe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ définie par l'équation $x + y + x^2y + y^3 = 0$.

a. Montrer que $\mathcal{C}$ coincide avec le graphe d'une fonction autour de chacun de ses points.

b. Soit $(x, y) \in \mathcal{C}$. Calculer la pente de la tangente à $\mathcal{C}$ en (x, y).

c. Déterminer les points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente à $\mathcal{C}$ est horizontale.

Exercice 6. On considère la courbe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ définie par l'équation $y^3 + xy - 12 = 0$.

a. Déterminer l'unique point $A \in \mathcal{C}$ en lequel on ne peut pas appliquer le théorème des fonctions implicites pour exprimer y en fonction de x.

b. Déterminer la pente de la tangente à $\mathcal{C}$ en tout point de $\mathcal{C}$ différent de A.

c. Montrer que $\mathcal{C}$ est également définie par une équation du type $x = g(y)$.

d. En calculant g', retrouver le résultat de la question b.