Licence 1 **2006-2007**
Mathématiques **EM11**

Fiche d'exercices n$^{\text{o}}$ 2

Fonctions usuelles

On note E la fonction « partie entière », Log le logarithme népérien, ch et sh les fonctions cosinus et sinus hyperboliques.

1) Déterminer les réels m tels que l'équation

$$(2m-1)x^2+2(m+1)x+m+3=0$$

admette deux racines réelles distinctes et inférieures ou égales à 1.

2) Résoudre les équations suivantes :

$$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right),$$
$$\sqrt{3}\cos(2x)-\sin(2x)=1,\quad 2(\sin x)^2-3\sin x-2=0.$$

3) Tansformer en sommes de sinus et cosinus les produits suivants :

$$\cos(2x)\cos(x),\quad \cos(x)\sin(x)\cos(3x),\quad \sin(x)^3.$$

4) Soit a et b deux réels fixés. Calculer pour tout $n\in\mathbb{N}$ la somme

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kb).$$

Lorsque b n'est pas multiple de 2π, on pourra multiplier par $\sin(\frac{b}{2})$ et linéariser.

5) Montrer que $||\sin x|-|\sin y||\leq|\sin(x+y)|\leq|\sin x|+|\sin y|$ pour tous x, $y\in\mathbb{R}$.

6) Montrer, en le calculant, que le nombre $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ est un entier.

7) Simplifier les expressions

$$\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[5]{64^3}\sqrt[4]{8^5}}{\sqrt[5]{16}\sqrt[3]{16^4}\sqrt[20]{2048}},\qquad \frac{\sqrt[5]{4}\sqrt{8}\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}.$$

8) Simpifier les expressions suivantes, après avoir précisé pour quelles valeurs de x elles sont définies.

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(e^{e^x})),\quad x^{\frac{\mathrm{Log}(\mathrm{Log}\,x)}{\mathrm{Log}\,x}},$$
$$\mathrm{ch}(\mathrm{Log}(x+\sqrt{x^2-1})),\quad \mathrm{sh}(\mathrm{Log}(x+\sqrt{x^2+1})).$$

9) Montrer qu'on a $(\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}\,x)^n=\mathrm{ch}\,nx+\mathrm{sh}\,nx$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$.

10) Soit a, $b\in\mathbb{R}$. Calculer pour tout $n\in\mathbb{N}$ les sommes

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{ch}(a+kb)\quad\text{et}\quad S_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{sh}(a+kb).$$

11) Trouver tous les réels x tels que $E(\sqrt{x}) = \sqrt{E(x)}$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(\sqrt{x^2+1}) = 2$.

12) Déterminer les ensembles de définition des fonctions définies par les formules suivantes :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \quad g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}, \quad h(x) = \frac{1}{x - E(x)},$$
$$i(x) = \sqrt{x - E(x) - \frac{1}{2}}, \quad j(x) = (1/\sqrt{x})^{\sqrt{x}}, \quad k(x) = \sin(x)\operatorname{Log}(x).$$

13) Exprimer le plus simplement possible les composées de fonctions suivantes :

a. $f \circ g$ et $g \circ f$ avec $f(x) = x^3$, $g(x) = 2 - x$.

b. $f \circ f$, $f \circ (f \circ f)$, $f \circ [f \circ (f \circ f)]$, avec $f(x) = -\dfrac{1}{x+1}$.

c. $f \circ g$ et $g \circ f$ avec $g(x) = E(x)$ et $f(x) = x - E(x)$.

(On mettra les polynômes sous forme développée.)

14) Les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a. Soit G une fonction telle que, pour toute fonction f, on ait $G \circ f = f$.
Montrer que G est la fonction identité.

b. Soit G une fonction telle que, pour toute f, on ait $G \circ f = f \circ G$. Montrer que G est l'identité.

c. Soit G une fonction telle que, pour tout f, on ait $G \circ f = G$. Montrer que G est constante.

15) Composition de fonctions affines.

a. Si $f(x) = ax + b$ et $g(x) = cx + d$ sont deux fonctions affines, montrer que $f \circ g$ est affine et calculer sa pente et son ordonnée à l'origine en fonction de a, b, c, d.

b. Trouver toutes les fonctions affines f telles que $f \circ f = \mathrm{id}$. Existe-t-il d'autres fonctions, non affines, vérifiant $f \circ f = \mathrm{id}$?

16) Montrer que, pour tout entier b et tout réel x, on a $E(x+b) = E(x) + b$.
Soit une fonction affine f, de pente a et d'ordonnée à l'origine b, telle que $E \circ f = f \circ E$.

a. Montrer que a et b sont forcément des entiers.

b. Montrer que $a = 0$ ou 1.

Déterminer l'ensemble des fonctions affines f telles que $f \circ E = E \circ f$.

17) La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est-elle monotone sur $\mathbb{R}_+^*$? sur $\mathbb{R}_-^*$? sur $\mathbb{R}^*$?

18) Soit $x < y$ deux nombres réels, et $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \dfrac{x+ty}{1+t}$.
Étudier la monotonie de f (sans calculer de dérivée).

19) Soit f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour tout $x \in I$ on pose

$$M(x) = \max(f(x), g(x)) \quad \text{et} \quad m(x) = \min(f(x), g(x)).$$

Montrer que les fonctions M et m sont croissantes si c'est le cas de f et de g.

20) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f \circ f = \mathrm{id}$. Montrer que $f = \mathrm{id}$.

21) Dire, parmi les fonctions suivantes, celles qui sont paires ou impaires.

$$f(x) = x^3 + x, \quad g(x) = x^3 + x + 1, \quad h(x) = C \ \ \text{(constante)},$$
$$i = \mathrm{id}, \quad j(x) = E(x), \quad k(x) = (x - E(x) - 1/2)^2.$$

Montrer que la dernière de ces fonctions est périodique.