Plan du cours

Chapitre 1. Nombres réels et fonctions

01/10

I Nombres réels

Notations : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}_+^*$, $\subset$, $\in$.

a) Algèbre

Symboles $\sum$ et $\prod$, factorielle. Identités remarquables. Racines d'un trinôme du second degré.

b) Ordre

Notations max, min, $|\cdot|$. Intervalles. Inégalité triangulaire. Partie entière.

05/10

II Fonctions

Notations et vocabulaire.

a) Opérations provenant de $\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions. Parité, periodicité. Comparaison entre fonctions. Monotonie.

b) Opérations ensemblistes

Image directe et réciproque. Composition. Fonction bijective, fonction réciproque.

III Fonctions usuelles

05/10

a) Logarithme et exponentielle

Primitive de $1/x$. Produit et inverse. $\mathrm{Log}(1+x) \leq x$. Limites de $\mathrm{Log}\, x$, $x \,\mathrm{Log}\, x$ et $(\mathrm{Log}\, x)/x$. Réciproque de Log. Dérivée. Somme et opposé. Limites de $\exp x$, $x \exp x$, $(\exp x)/x$. Graphes.

b) Fonctions puissance

Puissances entières sur $\mathbb{R}$ / $\mathbb{R}^*$, racines $n^{\text{ièmes}}$ sur $\mathbb{R}$ / $\mathbb{R}_+$. Définition générale sur $\mathbb{R}_+^*$. Formule $\exp x = e^x$. Règles de calcul. Graphes.

09/10

c) Fonctions trigonométriques

Définition, symétries, dérivées, graphes. Formules $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$, $(\mathrm{ch}\, x)^2 - (\mathrm{sh}\, x)^2 = 1$, formules d'addition. Inégalités $|\sin x| \leq |x|$, $|\mathrm{sh}\, x| \geq |x|$. Formules d'Euler.

Chapitre 2. Étude locale des fonctions réelles

I Limites

09/10

a) Quantificateurs

Introduction aux quantificateurs, négation. Exemples : point d'accumulation d'une partie de $\mathbb{R}$; parties majorées, minorées, non majorées.

b) Définition

Définition intuitive, définition mathématique.

15/10

c) Propriétés

Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient. Formes indéterminées. Limite d'une fonction composée. Passage à la limite dans les inégalités. Théorème des gendarmes.

d) Variantes

Limites en l'infini, limites infinies. Limites à droite et à gauche. Fonctions localement égales. Partie entière.

II Continuité et dérivation

19/10

a) Continuité

Limite en un point du domaine de définition. Continuité en un point. Exemples : continuité, discontinuités de première et seconde espèce.

b) Dérivation

Taux d'accroissement, dérivée. Dérivable $\Rightarrow$ continue. Exemple : $x \mapsto \sqrt{x}$. Règles de calcul.

c) Interprétation graphique de la dérivée

Caractérisation de la dérivée par un DL. Interprétation graphique.

III Développements limités

22/10

a) Introduction

Idée des développements limités, aproximations du graphe de $\exp(\sin(x))$.

b) Définition

Définition d'un développement limité. Unicité des coefficients. Exemple : $\frac{1}{1-x}$, polynômes. Développements de exp, $\ln(1+x)$, cos, sin, $(1+x)^{\alpha}$.

26/10

c) Opérations usuelles

Troncature, somme, produit, composée, quotient. Cas des fonctions paires, impaires.

d) Formule de Taylor-Lagrange

Dérivées d'ordre supérieur, fonctions de classe C^n. Théorème de Taylor-Young, application aux DLs. Exemples : $\frac{1}{1-x}$, exp.

29/10

e) Applications

Résolution de formes indéterminées, tangentes et position.

Chapitre 3. Fonctions de plusieurs variables

5/11

a) Définition

L'ensemble $\mathbb{R}^n$, équations d'hyperplans. Fonction réelle sur $\mathbb{R}^n$. Graphe. Cas des fonctions affines.

b) Dérivées partielles

Définition. Exemple.

7/11

c) Interprétation géométrique

Plan tangent. Cas $n = 1$, $n = 2$. Différentielle.

9/11

d) Dérivées secondes

Fonctions dérivées partielles. Dérivées secondes. Théorème de Schwarz.

e) Extrema

Extrema globaux et locaux. Condition nécessaire, points critiques.

Chapitre 4. Nombres complexes

30/11

I Forme algébrique

a) Définition

Définition de $\mathbb{C}$, partie réelle, partie imaginaire. Opérations. Conjugué et module. Inverse.

b) Interprétation graphique

Représentation graphique, affixe. Conjugaison, module, inégalité triangulaire.

c) Le trinôme du second degré

Théorème de D'Alembert-Gauss (énoncé). Racines complexes d'un trinôme du second degré. Méthode de calcul des racines carrées d'un nombre complexe.

3/12

II Forme trigonométrique

a) Définition

Nombres complexes de module 1, module, argument. Notation exponentielle, équation différentielle.

b) Interprétation graphique

Coordonnées polaires.

c) Règles de calcul

Produit, quotient, conjugué de formes exponentielles. Parties réelle, imaginaire et conjugué. Formules d'Euler.

7/12

d) Racines $n^{\text{ièmes}}$

Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Résolution de l'équation $z^n = a$.

Chapitre 5. Systèmes linéaires

10/12

I Généralités

a) Vocabulaire

Équations linéaires, systèmes linéaires, coefficients, terme constant, terme directeur, équation triviale, système homogène.

b) Solutions

Ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^n$. Systèmes équivalents. Sous-espace vectoriel dans le cas homogène. Cas général : solution particulière + système homogène associé.

II Méthode de Gauss

12/12

a) Systèmes échelonnés

Système échelonné, exemples. Résolution d'un tel système.

b) Réduction de Gauss

Opérations élémentaires. Algorithme de Gauss.

Chapitre 6. Polynômes

17/12

I Généralités

a) Définition

Expression linéaire (à coefficients dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) en les puissances d'une indéterminée X. Évaluation en un point du corps de base, fonction polynôme.

b) Opérations

Somme, produit. $K[X]$ est un anneau et $X^pX^q = X^{p+q}$. $K[X]$ est commutatif, intègre, mais n'est pas un corps. Polynôme dérivé, cas d'un produit, d'une somme.

c) Degré

Définition, $\deg(0) = -\infty$. Degré d'un produit, d'une somme. Polynôme constant. Coefficient dominant, polynôme unitaire ou normalisé.

II Arithmétique

a) Divisibilité

Définition. Propriétés élémentaires : P/Q_1 et $P/Q_2 \Rightarrow P/(Q_1 + Q_2)$, P/Q et $Q/R \Rightarrow P/R$, $P/Q \Rightarrow \deg(P) \leq \deg(Q)$, P/Q et $Q/P \Rightarrow Q = \lambda P$ avec $\lambda \in K^*$. Division euclidienne.

b) Plus grand commun diviseur

Définition. Algorithme d'Euclide et théorème de Bézout. Polynômes premiers entre eux, exemple : $X - a$ et $X - b$. Théorème de Gauss.

11/01

c) Racines

Racines et divisibilité. Ordre, racines multiples, lien avec la dérivée. Nombre maximal de racines.

d) Irréductibilité

Définition. Cas des degrés ≤ 3. Cas de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$. Lemme d'Euclide, théorème de décomposition. Forme de la DFI dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$, lien avec les racines.