Université de Caen **2007-2008**
UFR de Sciences **L2 MASS**
Mathématiques **EMA 43**

Partiel n° 1

lundi 18 février 2008

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

durée : 2 heures
Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Rappeler la définition de la continuité de f en 0.
3. Montrer qu'on a $|\sin x| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Pour le cas $x \geq 0$ on pourra étudier rapidement la fonction $g : x \mapsto x - \sin x$.
4. En utilisant la question précédente, montrer que f est continue en 0.
5. En utilisant la question précédente, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\sin(\frac{1}{n}) = 0$.

Exercice 2. On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + 2y + 7z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des solutions (x, y, z) du système est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Puis donner pour ce système :

1. un système triangulaire équivalent,
2. l'ensemble des solutions,
3. une base de l'ensemble des solutions,
4. la dimension de l'ensemble des solutions.

Exercice 3. Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. On note

$$P = (X-1)(X-2), \quad Q = X(X-2), \quad R = X(X-1).$$

1. Montrer que $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B} = (P, Q, R)$ sont des bases de E.
2. Soit $S = aP + bQ + cR$ un élément quelconque de E.
   a. Calculer les valeurs en 0, 1 et 2 de S.
   b. Montrer qu'il existe un unique polynôme de E prenant en 0, 1 et 2 des valeurs données.
3. À l'aide de la question précédente :
   a. trouver un polynôme $S \in E$ tel que $S(0) = 0^3$, $S(1) = 1^3$ et $S(2) = 2^3$;
   b. donner les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des polynômes 1, X et X^2.
4. Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$, et celle de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$.

Rappel pour l'exercice 3 : on appelle *matrice de passage* de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ la matrice obtenue en plaçant dans chaque colonne les coordonnées dans $\mathcal{B}_0$ d'un vecteur de $\mathcal{B}$. Par exemple, la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $((2,0,3),(0,1,2),(1,0,1))$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$