Université de Caen **2007-2008**
UFR de Sciences **L2 MASS**
Mathématiques **EMA 43**

Partiel n° 3

lundi 17 mars 2008

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

durée : 2 heures
Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

Exercice 1. *(4 points)*
Dire si les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont ouvertes, fermées ou ni l'un ni l'autre.
Dans chaque cas, démontrez votre affirmation.

$$A = \left]-\infty, 0\right[\cup [-1,1]\,, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x \text{ est entier}\}, \quad C = [1,3[\cup]3,+\infty[\,.$$

On admet que les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ et le sous-ensemble $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ sont des fermés.

Exercice 2. *(9 points)*
Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ -1 & 1 & a-1 \\ a-1 & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $u_1 = (0,1,0)$ est vecteur propre de f_a, pour tout a.
   Quelle est la valeur propre associée ?
2. Calculer le polynôme caractéristique de A, pour tout a.
   Le factoriser en produit de polynômes de degré 1.
3. On se place dans le cas $a = 1$.
   Montrer que f_1 est diagonalisable et déterminer une base de vecteurs propres.
4. On se place dans le cas $a = 0$.
   Déterminer la dimension du sous-espace propre de f_0 associé à la valeur propre 1.
   L'endomorphisme f_0 est-il diagonalisable ?
5. On suppose que $a \neq 0$ et $a \neq 1$. Montrer que f_a n'est pas diagonalisable.

Exercice 3. *(7 points)*
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on se donne un ouvert $U_n \subset \mathbb{R}$. On pose $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ et $Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

1. Rappeler qui est toujours ouvert : X ? Y ? Donner un contre-exemple pour l'autre.
2. On prend $U_n = \left]-\infty, n\right[\cup \left]n+1, +\infty\right[$ pour tout n. Que vaut Y dans ce cas ? est-il ouvert ?

On ne suppose plus que les U_n sont les ouverts de la question précédente.
On fait cependant l'hypothèse que U_n contient $\left]-n, n\right[$ pour tout n, et on veut montrer qu'alors Y est ouvert.
On fixe $x \in Y$, ainsi qu'un entier $N > x$.

3. Montrer que $\bigcap_{n<N} U_n$ est un ouvert.
4. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\left]x-\varepsilon, x+\varepsilon\right[\subset \bigcap_{n<N} U_n$.
5. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\left]x-\varepsilon, x+\varepsilon\right[\subset Y$. Conclure.
   On expliquera tout d'abord pourquoi le ε de la question précédente peut être choisi inférieur à $N - x$.