Université de Caen
UFR de Sciences
Mathématiques

2007-2008
L2 MASS
EMA 43

Partiel n° 4

lundi 31 mars 2008

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

durée : 2 heures
Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

Exercice 1. *(4 points)* On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$A = ([-1,1] \times [-2,0]) \cup (]0,2[\times]-1,1[), \quad B = \mathbb{Z} \times [0,1],$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x) \geq \cos(y)\}.$$

1. Représenter A et B.
2. Démontrer que B et C sont fermés.
3. Démontrer que A n'est ni ouvert ni fermé.

Exercice 2. *(7 points)* On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -10 & -1 & -2 \\ -23 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

0. Vérifier que $w = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\overline{w} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ sont les racines du polynôme $X^2 - X + 1$ dans $\mathbb{C}$.
1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
   Donner sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Soit D la matrice diagonale ayant 1, w et $\overline{w}$ comme termes diagonaux.
   Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$.
   On ne calculera ni P ni P^{-1}.
3. Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ et calculer D^n pour tout n.
4. Montrer qu'on a $\mathrm{Tr}(A^n) = 1 + 2\cos(\frac{2n\pi}{3})$ pour tout n.

Dans la question 4 la notation $\mathrm{Tr}(M)$ désigne la trace de M.
Rappelons qu'on a $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$ pour toutes matrices M, N.

Exercice 3. *(9 points)*
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$.

1. Montrer que f est continue.
2. Représenter dans le plan les courbes d'équations $y = 1 + x^2$ et $y = -(1 + x^2)$.
3. Représenter sur la même figure l'ensemble $f^{-1}([-1,1])$. Montrer qu'il n'est pas borné.
4. L'image réciproque d'un partie bornée par une application continue est-elle nécessairement bornée ?

On considère maintenant une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ quelconque. On suppose que cette fonction est *propre*, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui tend vers $+\infty$ et telle que

$$|x| \geq n \;\text{ ou }\; |y| \geq n \implies f(x,y) \geq u_n.$$

5. Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$: il existe $M > 0$ tel que $A \subset [-M, M]$.
   a. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n > M$. On fixe un tel n pour la question suivante.
   b. Montrer que pour tout $(x,y) \in f^{-1}(A)$ on a $|x| < n$ et $|y| < n$.
6. Montrer que l'image réciproque par f d'une partie bornée de $\mathbb{R}$ est encore bornée.
7. Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto \ln(1+x^2) + 2y^2$ est propre, avec $u_n = \ln(n)$.
   On pourra utiliser l'inégalité $t \geq \ln(t)$, valable pour tout $t > 0$.