Algèbre 2 : Diagonalisation

Exercice 1. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (-3x - 5y + 5z, -5x - 3y + 5z, -5x - 5y + 7z).$$

a. Montrer que le vecteur $e'_1 = (1,1,1)$ est vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?
b. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
c. Montrer que 2 est valeur propre de f et donner une base (e'_2, e'_3) du sous-espace propre associé.
d. Écrire la matrice de f dans la base canonique et dans la base (e'_1, e'_2, e'_3).
(On ne demande pas de vérifier que c'est effectivement une base.)

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) par

$$f(e_1) = -3e_1 + 4e_2 + 8e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - e_2 - 4e_3, \quad f(e_3) = -2e_1 + 2e_2 + 5e_3.$$

a. Montrer que 1 et -1 sont valeurs propres de f en déterminant une base des sous-espaces propres associés.
b. Montrer que ces sous-espaces propres sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
c. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = \ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \ker(f + \mathrm{Id})$.
Écrire la matrice de f dans cette base.
d. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ de $\mathbb{R}^3$ sont supplémentaires.

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 12 & 11 & 5 \\ -10 & -9 & -4 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de f.
b. Montrer que f est diagonalisable.
c. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.
d. Trouver une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
e. Que vaut la matrice D ?

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$f(x,y,z) = (-x, x - y + z, 3x + 2z).$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de f.
b. Déterminer les valeurs propres de f et la dimension des sous-espaces propres associés.
c. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.
d. Trouver une base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.

Exercice 5. On pose $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

a. Pour quelle valeur de a les colonnes de la matrice $M(a) - 2I_3$ sont-elles liées ?
b. Pour quelle valeur de a la matrice $M(a)$ admet-elle 2 comme valeur propre ?

On se place désormais dans le cas où 2 est valeur propre de $M(a)$.

c. Montrer que $M(a)$ est alors diagonalisable.
d. Déterminer une base de vecteurs propres de $M(a)$.

Exercice 6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de f.
b. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$. Pour $P \in E$ on pose
$$f(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'.$$

a. Montrer que f est un endomorphisme de E.
b. Calculer le polynôme $f(X^k)$.
c. On considère le cas $n = 3$. Écrire la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.
d. Toujours dans le cas $n = 3$, déterminer les valeurs propres de f.
e. Quelles sont les valeurs propres de f dans le cas général ?

Exercice 8. Soit a un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 4a-2 & -2 & 3 \\ 3a+1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le polynôme caractéristique P de f.
b. On prend $a = 0$.
   (i) Dresser le tableau de variation de la fonction $(x \mapsto P(x))$.
   (ii) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
c. Réaliser la même étude dans le cas $a = -1$.
d. On prend $a = \frac{1}{17}$.
   (i) Vérifier que 1 est racine double de P.
   (ii) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 9. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé, et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} -1 & a^2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3-2a & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de A. Vérifier qu'il ne dépend pas de a. Déterminer ses racines ainsi que leur multiplicité.
b. On considère le cas $a = 0$. Écrire la matrice A dans ce cas.
   (i) À l'aide du théorème du rang, montrer que les sous-espaces propres de f sont des droites.
   (ii) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
c. On revient au cas général.
   (i) Écrire la matrice $A - I_3$. À quelle condition sur a cette matrice est-elle de rang 1 ?
   (ii) Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier.

Exercice 10. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de f.
b. Déterminer les valeurs propres de f et la dimension des sous-espaces propres associés.
c. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
d. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre E_1.
e. On pose $u_3 = (-1, 1, 0)$. Vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
f. Écrire la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3).