Algèbre 3 : Applications de la diagonalisation

Exercice 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 5 \\ -10 & -9 & -4 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

a. Soit D la matrice diagonale ayant 0, 1 et -1 comme termes diagonaux.
Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.
On ne calculera ni P ni P^{-1}.

b. Montrer qu'on a $A^n = PD^nP^{-1}$ et calculer D^n pour tout n.

c. Montrer sans calcul qu'on a $A^m = A$ pour tout entier naturel impair m, et $A^m = A^2$ pour tout entier naturel pair non nul m.

d. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en distinguant 2 cas.

Exercice 2. On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.

b. Montrer que A est diagonalisable, sans rechercher de base de vecteurs propres.

Soit P la matrice de changement de base de la base canonique vers une base de vecteurs propres de A.
On ne cherchera pas à calculer P.

c. Donner une formule pour A^n en fonction de P et d'une matrice diagonale à préciser.

On note $\mathrm{Tr}(M)$ la trace d'une matrice carrée M.
Rappelons qu'on a $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$ pour toutes matrices carrées M, N.

d. Calculer $\mathrm{Tr}(A^n)$ pour tout n, à l'aide des question précédentes.

Exercice 3. On considère deux suites (u_n), (v_n) définies par les valeurs $u_0 = 7$, $v_0 = 4$ et le système de récurrence suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 11u_n - 18v_n \\ v_{n+1} = 6u_n - 10v_n. \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Trouver une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que le système ci-dessus s'écrive $X_{n+1} = AX_n$.

b. Trouver une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

On pose $Y_n = P^{-1}X_n$ et on appelle w_n, x_n ses composantes : $Y_n = P^{-1}X_n = \binom{w_n}{x_n}$.
Dans cet exercice on n'a pas besoin de calculer P^{-1}.

c. Déterminer w_0 et x_0 en résolvant un système linéaire.

d. Montrer que la suite (Y_n) vérifie l'équation de récurrence $Y_{n+1} = DY_n$.
En déduire deux équations de récurrence simples vérifiées par w_n et x_n.

e. Calculer u_n et v_n pour tout n.

Exercice 4. Déterminer les suites (u_n), (v_n), (w_n) données par $u_0 = -3$, $v_0 = 1$, $w_0 = 0$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 2w_n. \end{cases}$$

On suivra la démarche suivante :

a. écrire le système sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$,

b. diagonaliser A sous la forme $A = PDP^{-1}$, sans calculer P^{-1},

c. écrire la relation de récurrence vérifiée par $Y_n = P^{-1}X_n$,

d. calculer Y_0, puis Y_n pour tout n, et enfin revenir à X_n.

On notera a_n, b_n, c_n les trois coordonnées du vecteur colonne Y_n.