Algèbre 4 : Formes quadratiques

Exercice 1. Montrer que les applications φ suivantes sont des formes bilinéaires, dire si elles sont symétriques et calculer $\varphi(x,x)$:

1. $\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + 2xy' + zz' - 2yz' + 2x'y$
2. $\varphi((x,y),(x',y')) = 3xx' - x'y - xy' + yy'$

Montrer que les applications q suivantes sont des formes quadratiques en calculant les formes bilinéaires associées :

1. $q(x,y,z) = x^2 + 4xy - 2yz + z^2$
2. $q(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2$
3. $q(x,y,z) = 2xy - y^2 + 5yz + 3z^2$
4. $q(x,y,z) = xy + 2xz - yz$
5. $q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$

Écrire les matrices correspondantes dans la base canonique.

Exercice 2. Les formes quadratiques suivantes sont-elles positives ? définies-positives ?
En donner des expressions développées.

1. $q(x,y,z) = (x+2y)^2 + (z-y)^2 - 5y^2$
2. $q(x,y) = 2x^2 + (y-x)^2$
6. $q(x,y,z) = -2(x+y-z)^2 + (y-2z)^2 + (2x+y)^2$

Inversement, en décomposant les formes quadratiques 3, 4 et 5 de l'exercice précédent en carrés de formes linéaires indépendantes, dire si elles sont positives ou pas.

Exercice 3. Décomposer les formes quadratiques suivantes en carrés de formes linéaires indépendantes.

- $q_1 : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz$
- $q_2 : (x,y,z) \mapsto 2x^2 + 3y^2 - z^2 - 8xz$
- $q_3 : (x,y,z) \mapsto x^2 - 3y^2 - 2xy + 4xz$
- $q_4 : (x,y,z,t) \mapsto xy + xz + xt + yz + yt + zt$
- $q_5 : (x,y,z,t) \mapsto xy + xz + xt - yz + yt + 2zt$

Exercice 4. Soit a un nombre réel, et soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y,z) = a(x^2 + y^2 + z^2) - 2xy + 2xz + 2yz \quad \text{pour tout vecteur} \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

a. On suppose que $a = 0$. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $v = (2,2,1)$.
   Trouver une base de $D^\perp$. Les sous-espaces vectoriels D et $D^\perp$ sont-ils supplémentaires ?

b. Montrer que la forme quadratique q est définie positive si et seulement si $a > 2$.

c. On suppose que $a = 4$. Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $9x - y + 6z = 0$. Trouver une base de $P^\perp$.

Exercice 5. Pour tout nombre réel a on considère la forme quadratique $q_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$q_a(x,y,z) = a(x^2 + y^2) + 2z^2 - 2xy - 2xz + 2yz.$$

a. On se place dans le cas $a = 1$.
   (i) Montrer que q_1 est positive mais pas définie-positive.
   (ii) Montrer que $q_1(x,y,z) \geq z^2$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   (iii) Trouver un vecteur $v = (x,y,z)$ non nul tel que $q_1(x,y,z) = 0$.

b. On reprend le cas général.
   (i) En utilisant la question 1b, montrer que q_a est définie-positive lorsque $a > 1$.
   (ii) Calculer $q_a(v)$ pour tout a, où v est le vecteur trouvé à la question 1c.
   (iii) Pour quelles valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ la forme quadratique q_a est-elle définie-positive ?

c. On se place dans le cas $a = 2$.
   La forme quadratique q_2 est définie-positive, on munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire associé.
   (i) Donner l'expression du produit scalaire $u \cdot u'$ pour $u = (x,y,z)$ et $u' = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$.
   On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et P l'orthogonal de e_3.
   (ii) Écrire l'équation de P. Donner une base de P.
   (iii) Déterminer une base orthonormale de P.
   (iv) Déterminer le projeté orthogonal de e_1 sur P.