Université de Caen
UFR de Sciences
L2 MASS

2e semestre 2007-2008
Mathématiques
Analyse

Analyse 1 : Révisions

Exercice 1.

a. Trouver l'intersection de la droite (D) d'équation $x+y=5$ avec l'hyperbole (H) d'équation $xy=6$.

b. Trouver l'intersection des deux ensembles

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 3x+2y-1=0\} \quad \text{et} \quad F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x-5y+4=0\}.$$

c. Montrer qu'on a $A\subset B$ pour les ensembles suivants :

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x-1\}, \quad B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (-x+2y+4)(3x-y+3)\geq 0\}.$$

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, déterminer le complémentaire de $A=[0\,,1]$ dans E :

$$E=\mathbb{R}, \quad E=\mathbb{R}^2, \quad E=\mathbb{R}^3, \quad E=[0\,,5] \ \text{ et } \ E=[0.5\,,2].$$

Exercice 3.

a. Donner quatre éléments de $[1\,,2]\times[2\,,3]$, puis de $[0\,,1]\times\{4\}$.

b. Comment s'écrit un élément de $\mathbb{R}\times[0\,,1]$? de $\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+$?

c. Représenter $[1\,,2]\times[3\,,4]$, $([1\,,3]\times[2\,,4])\cup([2\,,4]\times[1\,,3])$ et $([1\,,3]\times[2\,,4])\cap([2\,,4]\times[1\,,3])$.

Exercice 4. *Rappelons que l'*image directe *de $A\subset E$ par $f:E\to F$ est la partie suivante de F :*

$$f(A)=\{y\in F \mid \exists x\in A \ \ y=f(x)\}.$$

a. Que vaut $f(A)$ dans le cas $E=F=\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $A=[-0.5\,,\,2]$?

b. Soit f une application de E vers F et A, $B\subset E$. Montrer que

$$A\subset B \Longrightarrow f(A)\subset f(B), \quad f(A\cup B)=f(A)\cup f(B) \quad \text{et} \quad f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B).$$

c. Grâce à la fonction considérée au a, montrer que la dernière inclusion peut être stricte.

Exercice 5. *Rappelons que l'*image réciproque *de $B\subset F$ par $f:E\to F$ est la partie suivante de E :*

$$f^{-1}(B)=\{x\in E \mid f(x)\in B\}.$$

On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto(e^x-1)^2$.

a. Tracer le tableau de variation, puis l'allure du graphe de f.
On pourra commencer par étudier la fonction $x\mapsto(x-1)^2$.

b. Déterminer $f^{-1}(\{a\})$ pour tout $a\in\mathbb{R}$.

c. On note I_a l'intervalle compris entre $\frac{1}{4}$ et a, ouvert en $\frac{1}{4}$ et fermé en a.
Déterminer $f^{-1}(I_a)$ pour tout $a\in\mathbb{R}$.

Exercice 6. On note $E(x)$ la partie entière de x. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x^2}{E(x)}=0$.

Exercice 7. On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ pour $x\neq 0$, et $f(0)=0$.

a. Déterminer $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$.

b. Trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui décroît vers 0 et telle que $f(x_n)=\frac{1}{2}$ pour tout n.

c. En déduire que f n'est pas continue en 0.

d. Qu'en est-il si on pose $f(0)=\frac{1}{2}$ au lieu de 0 ?

Exercice 8. Soit a, b deux réels et f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si} \quad x \in \,]-\infty, -1] \\ 2x - 1 & \text{si} \quad x \in \,]-1, 1[\\ b(x^2 - 1) & \text{si} \quad x \in [1, +\infty[\end{cases}$

a. Peut-on trouver une valeur de a pour laquelle f est continue sur $]-\infty, 1[$?

b. Peut-on trouver une valeur de b pour laquelle f est continue sur $]-1, +\infty[$?

Exercice 9. Dans les exemples ci-dessous, la fonction f peut-elle être prolongée par continuité en a ? Si oui, précisez le prolongement obtenu.

$f_1 : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1 + x^3}{1 + x} \quad$ en $\quad a = -1,$ $\qquad f_2 : \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\sqrt{7 + x} - 3}{x^2 - 4}$ en $a = 2,$

$f_3 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\tan x}{x} \quad$ en $\quad a = 0,$ $\qquad f_4 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1 - \cos 2x}{3x^2} \quad$ en $\quad a = 0,$

$f_5 : \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\cos(\pi x)}{2x - 1} \quad$ en $\quad a = \frac{1}{2},$ $\qquad f_6 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2} \quad$ en $\quad a = 0,$

$f_7 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x^2 + |x|}{x} \quad$ en $\quad a = 0,$ $\qquad f_8 : \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{(x - 2)^2}{x^2 + x - 6} \quad$ en $\quad a = 2,$

$f_9 : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 3 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad$ en $\quad a = 3.$

Exercice 10. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n \, \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
On pourra utiliser l'inégalité $|\sin(x)| \leq |x|$.

Exercice 11. On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3} u_n + \dfrac{14}{3}$.

a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.

b. Démontrer par récurrence que cette suite est croissante, majorée.

c. En déduire qu'elle converge vers une limite réelle ℓ et calculer ℓ.

d. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique. En déduire explicitement v_n puis u_n.

e. Déterminer le plus petit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - 7| \leq 10^{-3}$.

Procéder à la même étude pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + \dfrac{5}{2}$.