Analyse 2 : Topologie de $\mathbb{R}$

Exercice 1. Écrire les parties suivantes de $\mathbb{R}$ et leurs complémentaires comme réunions d'intervalles :

a. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
b. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 1| \leq 2\}$
c. $[2, 3[\cup \{0\}$
d. $]-3, 4[\cup [2, 5[$
e. $\mathbb{Z} \cup \mathbb{R}_-$
f. $\mathbb{R}_+^* \cap \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| > 1\}$

En déduire si ces sous-ensembles sont fermés, ouverts, ou si on ne peut pas conclure par cette méthode.

Exercice 2. Lorsque c'est possible sans calcul, dire si les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ sont ouverts, fermés ou ni l'un ni l'autre.

$$A_1 = \bigcup_{n \geq 2} \left[1 + \frac{2}{n^2},\ 3 - \frac{1}{2n}\right] \qquad A_2 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right),\ 4\right]$$

$$A_3 = \bigcap_{n \geq 2} \left[3 - \frac{2}{n^2},\ 3 + \frac{2n}{n-1}\right] \qquad A_4 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{2}{n},\ 2 + \frac{n}{n+1}\right]$$

Exprimer A_1, A_3 et A_4 comme intervalles et conclure.

Exercice 3. Exprimer comme intervalles les sous-ensembles A_1, A_2, A_3, $B \subset \mathbb{R}$ définis par :

$$A_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq \sin\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right\} \qquad B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\cos\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\ ,\ \cos\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n}\right].$$

Exercice 4. Exprimer les parties suivantes de $\mathbb{R}$ à partir d'images réciproques de sous-ensembles plus simples :

a. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 1| \leq 2\}$
b. $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) \geq \frac{1}{3}\}$
c. $\{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{ch}(x) > 3 \quad \text{ou} \quad \operatorname{ch}(x) < -2\}$
d. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 3x - 1 < \cos(3x)\}$
e. $\{x \in \mathbb{R} \mid \exp(x) \in [1, 2] \quad \text{ou} \quad \ln(x) \in [1, 2]\}$
f. $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) > \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \cos(x) > \frac{1}{3}\}$
g. $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \neq \exp(-x)\}$
h. $\mathbb{Z}$

En déduire si ces sous-ensembles sont fermés, ouverts, ou si on ne peut pas conclure par cette méthode.

Exercice 5. Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction partie entière, et considérons

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x - E(x).$$

a. Tracer le graphe de f sur $[-3, 3]$.
b. Écrire $I = f^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ et $J = f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$ comme réunions infinies d'intervalles.
c. I et J sont-ils ouverts, fermés, ou ni l'un ni l'autre ? Commenter.

Exercice 6. Soit f et g deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$\varphi(x) = \max(f(x), g(x)).$$

a. Montrer que pour tous a, $b \in \mathbb{R}$ on a $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.
b. Montrer que la fonction φ est continue.
c. En déduire que le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ suivant est fermé :

$$A = \{x \geq 0 \mid \max(2\sin x, \exp(\cos x)) \in \mathbb{N}\}.$$

Exercice 7. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$A = \mathbb{R}^*, \quad B = [e, \pi[\,, \quad C = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

a. Montrer qu'ils ne sont pas fermés, en utilisant des suites.
b. Donner une méthode plus rapide pour montrer que A n'est pas fermé.
c. Montrer que B n'est ni ouvert ni fermé, à l'aide de suites.
d. Montrer que $C \cup \{0\}$ est fermé.
On pourra écrire le complémentaire de $C \cup \{0\}$ comme réunion d'un nombre infini d'intervalles.

Exercice 8. On dit que deux réels x, y sont de même signe si on a ($x > 0$ et $y > 0$) ou ($x < 0$ et $y < 0$). On s'intéresse aux deux sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \text{ et } \sin(x) \text{ sont de même signe}\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \text{ et } \sin(x\sqrt{2}) \text{ sont de même signe}\}.$$

a. Tracer sommairement les graphes des fonctions sinus et cosinus sur $[0, 2\pi]$.
b. Représenter A sur la droite réelle, entre -3π et 3π.
c. Montrer que x appartient à A si et seulement si il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in \left]k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
d. Écrire A comme réunion d'un nombre infini d'intervalles. Montrer que A est ouvert.
e. Montrer que les fonctions suivantes sont continues :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)\sin(x) \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)\sin(x\sqrt{2}).$$

f. Exprimer A et B comme des images réciproques. Montrer que B est ouvert.
g. Peut-on exprimer B comme réunion d'intervalles ? *(Question subsidiaire)*

Exercice 9. On se propose de montrer *à l'aide de la définition* que les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont ouvertes :

$$A = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]\,, \quad B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

a. Soit $x \in A$ et $r = |x| - 1$.
Montrer que la boule ouverte de centre x et rayon r est incluse dans A.
b. Soit $x \in B$ et $r = |x - E(x + \frac{1}{2})|$.
Montrer que la boule ouverte de centre x et rayon r est incluse dans B.
c. En déduire que A et B sont ouverts.
On n'oubliera pas de vérifier que les réels r ci-dessus ne sont pas nuls.

Exercice 10. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on se donne un fermé F_n dans $\mathbb{R}$. Soit $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et $Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
a. Rappeler qui est toujours fermé : X ? Y ? Donner un contre-exemple pour l'autre.

On suppose que pour tout n, $F_n \cap [-n, n] = \emptyset$. On veut montrer qu'alors X est fermé.
b. Donner au moins un exemple de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lequel le résultat est clairement vrai.
c. Rappeler une CNS sur les suites $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans X qui permet de conclure que X est fermé.
d. Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans X ayant une limite l dans $\mathbb{R}$.
   (i) Montrer qu'il existe $n > 0$ tel que $x_i \in [-n, n]$ pour tout i.
   (ii) Montrer que les x_i se trouvent tous dans une réunion d'un nombre fini de F_k.
   (iii) En déduire que X est fermé dans $\mathbb{R}$.