Université de Caen
UFR de Sciences
L2 MASS

2e semestre 2007-2008
Mathématiques
Analyse

Analyse 3 : Topologie de $\mathbb{R}^2$

Exercice 1. On rappelle qu'une fonction polynômiale $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue, et que la composée, la somme et le produit de deux fonctions continues sont continus. Montrer de façon détaillée que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$:

a. $f(x, y) = xy + 2x^2y^2 - y^3$
b. $f(x, y) = \sin(x) + x^2$
c. $f(x, y) = \cos(xy^2) + \exp(2xy^2)$
d. $f(x, y) = \ln(2 + x^2 + y^2) + \exp(xy)$
e. $f(x, y) = \cos(x)\sin(y^2)$

Exercice 2. Représenter les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ puis dire s'ils sont ouverts, fermés, ou ni l'un ni l'autre, en justifiant :

a. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$
b. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$
c. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2\}$
d. $([2, 3] \cup \{0\}) \times [-1, 1]$
e. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ et } y = \frac{1}{x^2}\}$
f. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - xy > 0\}$
g. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x^2 + y^2) \geq 0\}$
h. $\mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$
i. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1,\ y \leq 2 \text{ et } x - y \geq 0\}$
j. $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
k. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1, 0)\}$
l. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 - (x^2 + y^2) = 0\}$

Montrer que le dernier ensemble est encore fermé lorsqu'on lui enlève le point $(0, 0)$.

Exercice 3. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils ouverts, fermés, ou ni l'un ni l'autre ?

a. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y^2 + z^3 > 1\}$
b. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sin(xyz) \in \left]0, \frac{1}{2}\right]\}$
c. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^{x+y+z} \in \mathbb{Z} < 2\}$
d. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sin(x) + \cos(yz) < 0\}$
e. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 > y^2 \text{ et } z \geq 0\}$

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère le sous-ensemble $H_n \subset \mathbb{R}^2$ défini comme suit :

$$H_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > nx\}.$$

a. On fixe n. Montrer que H_n est ouvert, par deux méthodes différentes.
b. On considère $Q = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n$.
   (i) Montrer que $Q = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+^*$.
   (ii) Montrer que Q n'est ni ouvert ni fermé.

Exercice 5. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $C(U) = \{\lambda u \mid u \in U,\ \lambda > 0\}$.

a. Représenter $C(U)$ dans les cas suivants :

$$U =]1, 2[\times]1, 2[\ ; \quad U =]-1, 1[\times]-1, 1[\ ; \quad U = \mathbb{R} \times]1, 2[\,.$$

b. Montrer que $C(U)$ est ouvert.
c. Montrer que $C(U) = \mathbb{R}^n$ si et seulement si $0 \in U$.

Exercice 6. Pour tous x, $y \in \mathbb{R}$ on pose

$$d'(x,y) = \sqrt{|x-y|} \quad \text{et} \quad d''(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

a. Montrer que d' et d'' sont des distances sur $\mathbb{R}$.

b. Soit (x_n) une suite de réels et $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que (x_n) converge vers x au sens de d' ou d'' **ssi** (x_n) converge vers x au sens usuel.

c. Représenter les boules de centre 0 et rayon 1 associées aux distances d' et d''.

Exercice 7. Rappelons que les distances d_1, d_2, d_∞ sur $\mathbb{R}^2$ vérifient :

$$d_1((0,0),(x,y)) = |x| + |y|, \quad d_2((0,0),(x,y)) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad d_\infty((0,0),(x,y)) = \max(|x|,|y|).$$

a. Représenter les boules ouvertes de centre $(0,0)$ et rayon 1 associées aux distances d_1, d_2 et d_∞.

b. Démontrer les inégalités $\max(|s|,|t|) \leq \sqrt{s^2+t^2} \leq |s|+|t| \leq 2\max(|s|,|t|)$ pour tous s, $t \in \mathbb{R}$.

c. En déduire des inclusions entres boules ouvertes de centre $(0,0)$ associées à d_1, d_2, d_∞.

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance euclidienne.
Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles bornées ? compactes ?

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(1-x)\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+xy+y^2 < 1\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos(x^2+y^2) < \frac{1}{2}\}$
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\, t \in [-1,1]\ x = t^2, y = t^3\}$

Exercice 9. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance euclidienne.
On se propose d'étudier la compacité des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 - e^{-x^2} \leq y \leq e^{-x^2}\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; e^{-x^2} \leq y \leq 1 - e^{-x^2}\right\}.$$

Pour cela on introduit les fonctions f_1, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = e^{-x^2}$ et $f_2(x) = 1 - e^{-x^2}$.

1. (a) En écrivant A comme une image réciproque, montrer que A est fermé.
   (b) Procéder de la même manière pour montrer que B est fermé.
2. (a) Montrer que si $(x,y) \in A$ on a $0 \leq y \leq 1$.
   (b) Montrer que si $(x,y) \in A$ on a $x^2 \leq \ln 2$. En déduire que A est borné.
   (c) Soit x_0 un réel tel que $x_0^2 \geq \ln 2$.
   En procédant comme en 2b, montrer qu'il existe un point de la forme (x_0,y) dans B.
   En déduire que B n'est pas borné.
3. (a) Les sous-ensembles A et B sont-ils compacts ?
   (b) Tracer sommairement les graphes de f_1 et f_2, puis l'allure de A et B.
   S'assurer que le dessin confirme le résultat de la question 3a.
4. (a) Montrer que la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = x + e^{y^2}$ est continue.
   (b) En déduire que l'ensemble de nombres réels suivant est borné :

$$X = \left\{x + e^{y^2} \;\middle|\; x,\, y \in \mathbb{R},\ \ 1 - e^{-x^2} \leq y \leq e^{-x^2}\right\}.$$