Analyse 4 : Continuité

Exercice 1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme suit est continue sur $\mathbb{R}^2$:
$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Montrer que f est continue en $(0,0)$.
On pourra commencer par montrer que $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ *et* $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ *pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
L'application f est-elle continue en $(0,0)$? *On pourra calculer* $f(x,x)$ *pour* $x \neq 0$.
Qu'en est-il si on pose $f(0,0) = \frac{1}{2}$ au lieu de 0 ?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, puis sur toute droite passant par $(0,0)$.
Faire tendre (x,y) vers $(0,0)$ sur la parabole d'équation $y = x^2$. L'application f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 5. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique, et $\mathbb{R}$ de la norme usuelle. Soit n un entier positif, et soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :
$$f(x,y) = \frac{xy^n}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

a. Montrer que pour tous entiers p, $q \in \mathbb{N}$ et tous réels x, $y \in \mathbb{R}$ on a $|x^py^q| \leq (x^2+y^2)^{\frac{p+q}{2}}$.
b. On suppose que $n > 1$. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
c. On suppose que $n = 1$. Montrer que la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$ entier.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \left|\dfrac{y}{x}\right| \ln\left(1 + \left|\dfrac{x}{y}\right|\right) & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

a. Montrer que $\mathcal{O} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que f est continue sur $\mathcal{O}$.
b. Montrer que, pour tout $a \neq 0$, la fonction f est continue en $f(a,0)$.
c. Calculer $f(a,a)$ pour tout a. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 7. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de l'application
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(xy)-1}{x^2y^2} & \text{si } xy \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$