Analyse 5 : Différentiabilité

Corrigé de l'exercice 11.

a. On a $U = g^{-1}(\mathbb{R}^*)$ avec $g(x, y) = y$. L'application g est continue car c'est un polynôme, et $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc U est un ouvert. Sur U, la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ est continue car c'est un quotient de polynômes et son dénominateur ne s'annule pas. En composant avec la fonction sin, qui est continue, puis en multipliant par le polynôme y, on obtient f, donc f est continue sur U.

b. D'après a., il reste à montrer que f est continue en $(a, 0)$, pour tout $a \in \mathbb{R}$. Fixons un tel a et remarquons que par définition de f on a $f(a, 0) = 0$.
Si $y = 0$ on a $f(x, y) = 0$, et si $y \neq 0$:

$$\left|f(x, y)\right| = \left|y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq y^2 \quad \text{car } |\sin(t)| \leq 1 \text{ pour tout } t.$$

On a donc dans tous les cas $|f(x, y)| \leq y^2$. Comme la fonction $(x, y) \mapsto y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et nulle en $(a, 0)$ on a $\lim_{(x,y)\to(a,0)} y^2 = 0$. Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x, y) = 0 = f(a, 0)$, ce qui montre que f est continue en $(a, 0)$.

c. D'après a., il reste à montrer que f admet des dérivées partielles en $(a, 0)$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé. On étudie pour cela des taux d'accroissement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, 0) = \lim_{x\to a} \frac{f(x, 0) - f(a, 0)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{0 - 0}{x - a} = 0, \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(a, y) - f(a, 0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2 \sin(\frac{a}{y}) - 0}{y} = \lim_{y\to 0} y \sin\left(\frac{a}{y}\right) = 0,$$

car $|y \sin(\frac{a}{y})| \leq y$ et $\lim_{y\to 0} y = 0$.

d. D'après a., il reste à montrer que f admet une différentielle en $(a, 0)$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé. Cette différentielle L est nécessairement donnée par les dérivées partielles trouvées à la question précédente : $L(h, k) = h\times 0 + k\times 0 = 0$. Donc f est différentiable en $(a, 0)$ si et seulement si il existe une application $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en $(0, 0)$ et telle que :

$$f(a + h, k) = f(a, 0) + L(h, k) + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k) = \|(h, k)\|\varepsilon(h, k).$$

On a nécessairement $\varepsilon(h, k) = f(a + h, k)/\|(h, k)\|$, et la limite de cette quantité en $(0, 0)$ est bien nulle d'après la majoration suivante :

$$|\varepsilon(h, k)| = \frac{k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}\left|\sin\left(\frac{a + h}{k}\right)\right| \leq \frac{k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \sqrt{h^2 + k^2}.$$

e. *D'après a. et c., f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ entier et elles sont continues sur U. Si f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, cela ne peut donc être qu'à cause de la non-continuité d'une des dérivées partielles en un point de la forme $(a, 0)$.*
Calculons la dérivée partielle de f par rapport à y sur U :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \times \sin\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 \times \cos\left(\frac{x}{y}\right) \times \frac{-x}{y^2} = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\text{et en particulier} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, y) = 2y \sin\left(\frac{1}{y}\right) - \cos\left(\frac{1}{y}\right).$$

Quand y tend vers 0, le premier terme tend vers 0 car il est majoré en valeur absolue par $2|y|$. Par contre le second terme n'a pas de limite car il oscille de plus en plus rapidement entre -1 et 1. Cela montre que la dérivée partielle de f par rapport à y n'a pas de limite en $(1, 0)$, donc f n'est pas de classe C^1.
On peut vérifier en revanche que la dérivée partielle par rapport à x admet 0 comme limite en tout point de la forme $(a, 0)$, ce qui coïncide avec la valeur trouvée en c. : cette dérivée partielle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$ entier.