Analyse 5 : Différentiabilité

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par les expressions suivantes :

$$f_1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\,; \qquad f_2(x,y) = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\,; \qquad f_3(x,y) = \ln(\tan\frac{x}{y})\,;$$
$$f_4(x,y,z) = (xy)^z\,; \qquad f_5(x,y) = \frac{xy^2}{x+y}\,; \qquad f_6(x,y) = \ln(1+\frac{y}{x}).$$

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
On définit une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ en posant

$$g(x,y) = f(u,v), \quad \text{avec} \quad u = xy \quad \text{et} \quad v = \frac{y}{x}.$$

a. Montrer que g est de classe C^1.

b. Calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

c. On fixe $(x,y) \in E^2$. Montrer qu'on a $x\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial v}\Big(xy, \dfrac{y}{x}\Big) = 0$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x,y,z) = f(x^2-y^2, y^2-z^2, z^2-x^2).$$

Montrer que g est de classe C^1 et que pour tout réel t on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,t,t) + \frac{\partial g}{\partial y}(t,t,t) + \frac{\partial g}{\partial z}(t,t,t) = 0.$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = |x|\sin(x^2+y)$.

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. En quels points de $\mathbb{R}^2$ la fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x ? à y ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$, que l'on calculera.
Est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 6. Montrer à l'aide la définition que les applications suivantes sont différentiables en tout point :

$$f_1 : (x,y) \mapsto y + xy^2, \qquad f_2 : (x,y,z) \mapsto x^2 + xy + z.$$

Expliciter la différentielle de f_1 en $(1,0)$ et celle de f_2 en $(1,0,1)$.
Indication : si p et q sont deux entiers tels que $p+q \geq 2$, alors $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^p k^q}{\|(h,k)\|} = 0.$

Exercice 7. Montrer, en calculant des dérivées partielles, que les applications suivantes sont différentiables :

$$f_1(x,y) = \ln(1+x^2+y^2), \qquad f_2(x,y,z) = \cos(xy) + x\sin(z).$$

Expliciter la différentielle de f_1 en $(1,0)$ et celle de f_2 en $(1,0,\frac{\pi}{2})$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Les « théorèmes généraux » montrent que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

a. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
b. Montrer que f admet l'application linéaire nulle comme différentielle en $(0,0)$,
c. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, sachant que $|\sin t| \leq |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
c. Montrer que f admet des dérivées partielles nulles en $(0,0)$.
d. Quelle relation vérifierait $f(x,x)$ si f était différentiable en $(0,0)$?
Déterminer $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t}$ et en déduire que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 10. Pour tout réel strictement positif α on considère la fonction $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$f_\alpha(x,y) = |xy|^\alpha \quad \text{pour} \quad (x,y) \neq (0,0), \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Notons par ailleurs $h_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $h_\alpha(t) = |t|^\alpha$ pour $t \neq 0$ et $h_\alpha(0) = 0$. On rappelle que h_α est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha > 1$.

a. On fixe $\alpha > 0$. La fonction h_α est-elle continue en 0 ? La fonction f_α est-elle continue en $(0,0)$? Justifier.
b. Montrer que f_α admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0,0)$, pour tout $\alpha > 0$.
Calculer ces dérivées partielles.
c. On suppose que $\alpha > 1$. Montrer que f_α est différentiable en $(0,0)$, sans revenir à la définition.
d. On suppose que $\alpha > \frac{1}{2}$. Montrer grâce à la définition que f_α est différentiable en $(0,0)$.
e. On suppose que $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Montrer que f_α n'est pas différentiable en $(0,0)$.
On pourra pour cela considérer le comportement de f_α sur la droite $y = x$.

Exercice 11. On pose $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ et on définit une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } (x,y) \in U \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin U. \end{cases}$$

a. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que f est de classe C^1 sur U.
b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
c. Montrer que f a des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
d. Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.
e. Montrer que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = |x^3 - y^3|^{2/3}$.

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
b. Soit $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 > 0\}$ et $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 < 0\}$.
   (i) Montrer que U_1 et U_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
   (ii) Montrer que g est de classe C^1 sur U_1 et U_2.
c. Montrer que g n'est pas différentiable en $(1,1)$.