ANALYSE 6 : DÉRIVÉES PARTIELLES SECONDES

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions des variables réelles définies par les expressions suivantes :

$$f_1(x,y) = \frac{x-y}{x+y}, \quad f_2(x,y) = x^y, \quad f_3(x,y,z) = xz^3 + y^2 z + xy^4 z.$$

Exercice 2. Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :

$$f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \arctan \frac{y}{x},$$
$$g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \ln((x-a)^2 + (y-b)^2).$$

Rappelons qu'on pose, pour toute fonction f de deux variables et de classe C^2 : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
On dit que f est harmonique si $\Delta f = 0$.

Exercice 3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x,y) = (x^2 + y^2, xy) \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que $g \circ f$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de $g \circ f$ en fonction des dérivées partielles de g.

Exercice 4. Soit $u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = u(\sqrt{x^2+y^2})$. Montrer que la fonction f est de classe C^2 et que pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ on a l'égalité :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Exercice 5. Soit $u : \mathbb{R}^* \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $u(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et posons $F = f \circ u$.

a. Montrer que F est de classe C^2 et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.

b. Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial r}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$, r et θ.

c. Établir l'expression suivante du laplacien en coordonnées polaires :

$$(\Delta f)(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta).$$

d. On prend $f(x,y) = x^2 - y^2$. Montrer que f est harmonique. Que vaut F dans ce cas ?

e. Montrer plus généralement — et directement — que les fonctions $F(r,\theta) = r^k \cos(k\theta)$ des coordonnées polaires (r,θ) sont harmoniques, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sur cet ensemble.

c. Montrer que la dérivée partielle seconde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et la calculer.

d. Déduire des questions précédentes que f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les calculer.

c. f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0.$$

a. Calculer les dérivées partielles de f par rapport à x et y sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b. Montrer que f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0,0)$, et les calculer.

c. Montrer que les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existent, et les calculer.

d. L'application f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les calculer.

c. f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?