Analyse 8 : Équations aux dérivées partielles

Exercice 1. Soit $E =]-1,1[^2 \subset \mathbb{R}^2$.

a. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que

$$\forall (x,y) \in E \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1.$$

Montrer qu'il existe une application $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $f(x,y) = x + g(y)$ pour tout $(x,y) \in E$.

b. Déterminer toutes les applications $f : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que

$$\forall (x,y) \in E \quad (x^2+y^2+1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2xf(x,y) = 1.$$

Exercice 2. Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - (x+1)e^x \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0. \tag{1}$$

a. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = h(y + xe^x)$. Montrer que f est de classe C^1 et que f est solution de (1).

b. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 qui vérifie (1). Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(t) = f(0,t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (i) Montrer que la fonction h est de classe C^1.
   (ii) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $h(t) = f(x, t - xe^x)$.
   (iii) En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x,y) = h(y + xe^x)$.

c. Donner toutes les solutions de (1).

Exercice 3. Soit $E =]0,+\infty[^2$. On chercher à déterminer l'ensemble des fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in E \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0. \tag{2}$$

Soit $\varphi : E \to E$ l'application définie par $\varphi(u,v) = \left(u, \frac{u}{v}\right)$ pour tout $(u,v) \in E$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $g = f \circ \varphi : E \to \mathbb{R}$ sa composée avec φ.

a. Montrer que g est de classe C^1. Calculer les dérivées partielles de g au point (u,v) en fonction de u, v et des dérivées partielles de f.

b. En déduire qu'on a, pour tout $(u,v) \in E$ et $(x,y) = \varphi(u,v)$:

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

c. Montrer que f vérifie (2) si et seulement si g vérifie l'équation suivante :

$$\forall (u,v) \in E \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0.$$

Quelle propriété de φ utilise-t-on ?

d. Montrer que f est solution de (2) si et seulement si il existe une fonction $h :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(x,y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$ pour tout $(x,y) \in E$.

Exercice 4. Soit $E =]0,+\infty[^2$ et $\varphi : E \to E$ l'application définie par $\varphi(u,v) = \left(uv, \frac{v}{u}\right)$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $g = f \circ \varphi$. Résoudre grâce à g l'équation

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Exercice 5. Le but de cet exercice est de chercher les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0. \tag{3}$$

a. Soient g et h deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = g(x) + h(y)$. Montrer que f est de classe C^2 et que f est solution de (3).

b. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 qui vérifie (3).

(i) Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi(y) \quad \text{pour tout} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Montrer qu'il existe des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $f(x,y) = g(x) + h(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.