Plan du cours

On suppose connues les propriétés élémentaires des nombres réels et des espaces vectoriels et, uniquement pour les exemples, quelques propriétés élémentaires des fonctions réelles de la variable réelle.

Notations :
- théorie des ensembles : $A \cup B$, $A \cap B$, ${}^cA$ pour $A \subset X$, $\mathscr{F}(A,B) = B^A$;
- fonctions : $\mathscr{C}^k([a,b]) \subset \mathscr{C}([a,b]) \subset \mathscr{F}([a,b], \mathbb{R})$;
- espaces vectoriels : $L(E,F)$, $L(E)$, E^*.
- conventions dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Chapitre 1. Distances et normes

I Espaces métriques

a) Définitions

Définitions. Distance, espace métrique. Variantes : pseudodistance (pas de séparabilité), écart (pas de séparabilité, valeurs dans $[0,+\infty]$). Distances équivalentes.
Exemples : distance usuelle sur $\mathbb{R}$, distance usuelle sur $\mathbb{C}$, distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Exemples plus exotiques : distance « SNCF » sur $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$: $d(re^{i\theta}, se^{i\phi}) = |s-r|$ si $\theta \equiv \phi \mod 2\pi$, $r+s$ sinon, avec $r,\ s \geq 0$. Distance euclidienne sur $\mathbb{N}^2 \subset \mathbb{R}^2$, distance « de Manhattan » sur $\mathbb{N}^2$: $d((m,n),(m',n')) = |m'-m| + |n'-n|$.
Exercice 1 : Vérifier que la distance de Manhattan est une distance.
Proposition : membre de gauche de l'inégalité triangulaire.

b) Cas ultramétrique

Définitions. Valuation $v : A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sur un anneau : $v(a) = +\infty \Leftrightarrow a = 0$, $v(ab) = v(a) + v(b)$, $v(a+b) \geq \min(v(a), v(b))$. Distance associée $d(a,b) = \exp(-v(a-b))$, distance ultramétrique. Proposition : la distance associée à une valuation est une distance ultramétrique.
Exemples : valuation des polynômes, valuation p-adique sur $\mathbb{Q}$.
Exercice 2 : Vérifier que la valuation p-adique est une valuation.

c) Sous-ensembles

Définition. Distance induite.
Définition. Parties bornées, diamètre d'une partie. Proposition : la bornitude ne dépend pas du point base, est équivalente à la finitude du diamètre. Exemple : $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1\}$ est non bornée, ainsi que ${}^cA$.
Exercice 3 : Montrer qu'une réunion de deux parties bornées est bornée, et qu'une intersection d'un nombre quelconque de parties bornées est bornée.
Définition. Distance à une partie $A \subset X$. Proposition : $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.
Exercice 4 : On pose $A = [0,1]$. Donner l'expression de $d(x,A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en distinguant 3 cas. Montrer que $d(x,A) = 0$ ssi $x \in A$. Est-ce encore vrai pour $A =]0,1[$?

II Espaces vectoriels normés

a) Définitions

Définitions. On fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $|\cdot|$ la valeur absolue ou le module. Norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, espace vectoriel normé. Distance associée. Proposition : c'est une distance. Variante : semi-norme (pas de séparabilité). Normes équivalentes. Norme induite sur un sous-espace.
Exemples. $E = \mathbb{K}$ a une seule norme, à un multiple près. Rappel : forme bilinéaire symétrique définie-positive sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, inégalité de Cauchy-Schwartz. Proposition : la racine carrée de la forme quadratique est une norme. Norme euclidienne canonique sur $\mathbb{K}^n$, distance associée.
Exercice 5 : Montrer le membre de gauche de l'inégalité triangulaire pour une norme. Cela montre que la norme est continue, et même 1-lipschitzienne.

b) Espaces produits et espaces de fonctions

Définition : normes N_1, N_2, N_∞ sur un produit fini d'espaces vectoriels normés. Proposition : ce sont bien des normes, elles sont équivalentes. Remarque : il y a des notions correspondantes pour les produits d'espaces métriques. Variantes : normes N_p, $1 \le p < +\infty$. Généralisation : produits infinis (dénombrables).
Exemples. On retrouve la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{K}^n$. La distance de Manhattan par restriction à $\mathbb{N}^2 \subset (\mathbb{R}^2, N_1)$. Espaces $\ell^p(\mathbb{N}) = \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Les normes N_1, N_2, N_∞ ne sont pas équivalentes sur le sous-espace (de dim. infinie) des suites à support fini.
Exemples reliés : normes N_p, $1 \le p \le +\infty$, sur $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
Exercice 6 : Calculer les normes N_1, N_2, N_∞ des fonctions $f_n : x \mapsto \max(1 - nx, 0)$ définies sur $[0, 1]$. En déduire que ces normes ne sont pas équivalentes sur $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$.
Espace des fonctions bornées $\mathscr{F}_b(X, E)$, pour X ensemble et E evn. Norme de la convergence uniforme.

c) Norme d'opérateur

Définition. Opérateur borné, norme d'opérateur (ou subordonnée) $\|f\| = \|f\|_{E \to F} = \|f\|_{N \to P}$, le sous-espace $L'(E, F) \subset L(E, F)$. Cas particulier : $E' = L'(E, \mathbb{K}) \subset E^*$. Attention : l'opérateur $f \in L(E, F)$ est borné **ssi** sa restriction à la boule unité est une fonction bornée. Aucun opérateur non nul sur un $\mathbb{K}$-ev n'est borné en tant que fonction.
Proposition : la norme d'opérateur est une norme sur $L'(E, F)$. Proposition : la notion d'opérateur borné ne change pas si on remplace les normes sur E, F par des normes équivalentes ; la norme subordonnée est remplacée par une norme équivalente. Proposition : $\|g \circ f\|_{E \to G} \le \|g\|_{F \to G} \|f\|_{E \to F}$, cas $E = F = G$.
Exemples. On munit $E = \mathscr{C}^\infty([0, 1]) \subset \mathscr{C}([0, 1])$ de la norme N_∞. Alors $M : E \to E$ donnée par $M(f) = (x \mapsto xf(x))$ est bornée et $\|M\| = 1$. Par contre $D : f \mapsto f'$ ne l'est pas.
Exercice 7 : Avec les mêmes notation, montrer que $T \in L(E)$ donné par $T(f) = (x \mapsto 2f(x/2))$ est borné, et calculer sa norme d'opérateur.

Application : normes sur $M_{k,l}(\mathbb{K})$. On dispose des normes N_p en identifiant $M_{k,l}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{kl}$. On dispose de plusieurs normes subordonnées en identifiant $M_{k,l}(\mathbb{K}) \simeq L(\mathbb{K}^l, \mathbb{K}^k)$ et en choisissant des normes sur $\mathbb{K}^l$ et $\mathbb{K}^k$. Exemples : calcul de $\|M\|_{N_1}$, $\|M\|_{N_2}$, $\|M\|_{N_\infty}$, $\|M\|_{N_2 \to N_2}$ pour une matrice antidiagonale 2×2. Proposition : on a $\|M\|_{N_\infty \to N_1} \le \|M\|_{N_1}$, donc tous les opérateurs de $L(\mathbb{K}^l, \mathbb{K}^k)$ sont bornés lorsque $\mathbb{K}^k$, $\mathbb{K}^l$ sont munis d'une norme parmi N_1, N_2, N_∞.
Remarque. On montrera au chapitre 4. que sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. La proposition précédente montre donc que toutes les applications linéaires sont bornées en dimension finie.
Exercice 8 : Calculer $\|I_n\|_{N_1}$, $\|I_n\|_{N_2}$, $\|I_n\|_{N_\infty}$, $\|I_n\|_{N_1 \to N_1}$, $\|I_n\|_{N_\infty \to N_\infty}$. Ici $I_n \in M_n(\mathbb{K})$ est la matrice identité.

Chapitre 2. Topologie métrique

Remarque : applications et distances. Applications isométriques, lipschitziennes. Isomorphismes d'espaces métriques : bijections isométriques. Bijections bilipschitziennes. On va étudier une notion plus faible que le caractère lipschitzien : la continuité. Homéomorphisme : bijection bicontinue.

I Limites et continuité

a) Suites convergentes

Définition : convergence d'une suite dans un espace métrique, un espace vectoriel normé. Comparaison avec la définition pour les suites réelles, comment s'y ramener en considérant $d_n = d(x_n, l)$. Proposition : unicité de la limite, ne dépend pas de la distance à équivalence près. L'unicité n'est plus vraie si on a seulement une pseudo-distance.
Proposition : convergence dans un espace produit. Proposition : limite d'une combinaison linéaire de suites. Exemple : convergence dans $\mathbb{K}^n$.
Exercice 1 : On considère la suite $P_n = (\cos \frac{1}{n}, \sin \frac{1}{n})$ dans $\mathbb{R}^2$. Calculer la distance de P_n à $P = (1, 0)$ pour la distance usuelle, la distance de Manhattan et la distance SNCF. A-t-on $\lim P_n = P$? Question subsidiaire : $(P_n)_n$ converge-t-elle pour la distance SNCF ?

b) Fonctions continues

Définition : continuité de $f : A \to A'$ en $a \in A$, continuité de f sur A, sur une partie de A. Remarque : ne dépend pas des distances à équivalence près. Exemples : continuité de $d(\cdot\,, \cdot)$ sur $(A \times A, d_1)$, continuité des projections canoniques sur un espace produit.

Proposition : continuité d'une fonction à valeurs dans un espace produit. Proposition : caractérisation séquentielle de la continuité. Méthode pour montrer qu'une fonction n'est pas continue. Rappels. Continuité de composées, sommes (A' evn), produits, quotients ($A' = \mathbb{K}$). Lemme des gendarmes ($A' = \mathbb{R}$). Exemples : continuité des polynômes, de $f : (x, y) \mapsto \cos(x + y)$.
Exercice 2 : On munit $\mathbb{R}^2$ d'une distance équivalente à la distance usuelle. Montrer soigneusement que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (xy - 2y^2, x \exp(y))$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

II Ouverts et fermés

a) Définitions

Définition : $B(a, r)$, $\bar{B}(a, r)$, $S(a, r)$. Exemples : boules dans $\mathbb{R}^2$ muni de N_1, N_2, N_∞, de la distance SNCF. Boules dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{N}$.
Définition : ouverts, fermés (complémentaires d'ouverts), frontière $\mathrm{Fr}(A) = \{a \in A \mid \forall r > 0$ $B(a, r)$ rencontre A et ${}^cA\}$. Proposition : $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}({}^cA)$, A est ouvert **ssi** $A \cap \mathrm{Fr}(A) = \emptyset$, fermé **ssi** $\mathrm{Fr}(A) \subset A$. Interprétation « graphique ».
Exemples : $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, intervalles de $\mathbb{R}$, $\{0\} \subset \mathbb{N}$, $B(a, r)$, $\bar{B}(a, r)$. Exemple : $\mathrm{Fr}\,\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ **ssi** tout intervalle ouvert non vide contient un rationnel et un irrationnel.
Exercice 3 : On considère $\mathbb{R}^2$ munit de la distance associée à N_1, et $A = \{(x, y) \mid x + y > 0\}$. Pour $a = (x, y) \in A$, donner le rayon maximal d'une boule ouverte de centre a incluse dans A.
Définitions : intérieur, fermeture de A (en utilisant $\mathrm{Fr}(A)$), densité.

b) Propriétés générales

Proposition : réunions et intersections d'ouverts, de fermés. Contre-exemples dans $\mathbb{R}$. Exemple : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ est fermé. Définition : notion abstraite de topologie. Remarque : la topologie d'un espace métrique est séparée, ce n'est pas le cas en général.
Exercice 4 : Montrer que $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
Définition : distances topologiquement équivalentes. Proposition : équivalentes $\Rightarrow$ top. équivalentes. Exemples : $\mathbb{R}$ muni de d usuelle, de $f \circ d$ avec $f(x) = x/(1+x)$ (mêmes boules) ; $\mathbb{R}^2$ muni de N_1, N_2, N_∞ (boules différentes), de la distance SNCF.
Proposition : produit d'ouverts, ouverts pour une distance induite. Exemples : pavés ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$, $]0, 1]$ est un fermé de $\mathbb{R}^*$.

c) Lien avec la continuité

Rappel : images réciproque et directe.
Proposition : caractérisation topologique de la continuité (globale). Remarque : ainsi la notion de continuité ne dépend des distances qu'à équivalence topologique près. Remarque : rien pour l'image directe.
Application : construction d'ouverts et de fermés. Exemple : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos(x + y) > \exp(x)\}$ est un ouvert.
Exercice 5 : En utilisant la fonction $(t \mapsto \sin(\pi t))$, montrer que $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
Lemme : si Z est un fermé contenant Y, alors Z contient $\bar{Y}$ (passer aux complémentaires). Proposition : deux fonctions continues égales sur une partie dense sont égales partout. Exemple : $\mathbb{Q}$ et ${}^c\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, f continue et additive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme $f(x) = ax$.

d) Lien avec les limites

Proposition : caractérisation topologique de la convergence. Remarque : ainsi la notion de convergence ne dépend des distances qu'à équivalence topologique près.
Proposition : caractérisation séquentielle des ouverts et des fermés. Justification de la terminologie. Méthode pour montrer qu'une partie n'est pas ouverte, pas fermée. Lemme : $a \in \bar{A} \Leftrightarrow$ il existe une suite dans A qui tend vers $a \Leftrightarrow d(a, A) = 0$; $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
Exercice 6 : Montrer que $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$. Que dire de $A \cup \{0\}$?

III Cas des espaces vectoriels normés

a) Sous-espaces

Proposition : la fermeture d'un sev est un sev. Exemple : sous-espaces des suites presque finies, des suites qui tendent vers 0, dans ℓ^∞ ; sous-espace des fonctions continues dans l'espace des fonctions bornées $\mathscr{F}_b(X, E)$, si X est un espace métrique.
Exercice 7 : Montrer que le sous-espace $\{f \mid f(0) = 0\} \subset \mathscr{C}([0, 1])$ est fermé pour la norme de la convergence uniforme.

b) Applications linéaires

Proposition : Une application linéaire $f : E \to E'$ entre evn est continue **ssi** elle est bornée. Corollaire : deux normes sont équivalentes **ssi** elles sont topologiquement équivalentes.
Remarque : noyau fermé. Proposition : une forme linéaire est bornée **ssi** son noyau est fermé. Exemple : sous-espace des suites à limite nulle parmi les suites convergentes.
Exercice 8 : Montrer que le sous-espace $\{f \mid \int_0^1 f = 0\} \subset \mathscr{C}([0,1])$ est fermé pour la norme de la convergence uniforme.

Chapitre 3. Espaces complets

I Théorie générale

a) Définition

Suites de Cauchy. Exemple : suites convergentes, suites adjacentes dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$. Remarque : une suite de Cauchy est bornée. Espaces complets, espaces de Banach. Exemple : $\mathbb{R}$ est complet — par définition, cf plus loin. Conséquence : théorème des suites adjacentes dans $\mathbb{R}$. Exemple : $\mathbb{Q}$ n'est pas complet, la suite définie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = x_n/2 + 1/x_n$ est une suite de Cauchy rationnelle qui converge vers $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Exemple : $]0,1[$ n'est pas complet.
Exercice 1 : étudier cette suite, en particulier, montrer que $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$, puis que $(u_n)_n$ est décroissante (sans récurrence).

b) Propriétés

Proposition : si $X \subset Y$ est complet pour la distance induite, il est fermé. La réciproque est vraie si Y est complet. Proposition : distances équivalentes, espaces isométriques. Contre-exemple : $d'(x,y) = |1/x - 1/y|$ sur $[1,+\infty[$ est topologiquement équivalente à d mais $(n)_n$ est une suite de Cauchy qui ne converge pas pour d'.
Proposition : un produit cartésien d'espaces complets est complet pour l'une des distances produit. Exemple : $\mathbb{C}$ est complet, $\mathbb{K}^n$ est un espace de Banach pour N_1, N_2, N_∞.
Exercice 2 : Montrer que $\mathbb{N} \times [0,1]$ est complet pour la distance induite par la distance euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$.

c) Espaces fonctionnels

Proposition. L'espace des fonctions bornées $\mathscr{F}_b(X,E)$, où X est un ensemble et E un espace de Banach, est un espace de Banach pour la norme de la convergence uniforme. Exemple : $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
Corollaire : si X est un espace métrique et E est un espace de Banach, l'espace des fonctions continues bornées $\mathscr{C}_b(X,E)$ est un espace de Banach pour la norme de la convergence uniforme. Exemple : $\mathscr{C}([0,1])$.
Exercice 3 : montrer que $E = \{f \in \mathscr{C}([0,1]) \mid f(0) = 0\}$ est un espace de Banach pour la norme de la convergence uniforme.
Proposition. Si E est un espace vectoriel normé et F est un espace de Banach, l'espace $L'(E,F)$ est un espace de Banach pour la norme d'opérateur. Cas particulier : si E est un evn, E' est un espace de Banach.

II Applications

a) Équivalence des normes

Théorème. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes et E est complet.
Corollaires : les sous-espaces de dimension finie sont fermés, les applications linéaires sont continues en dimension finie.
Exercice 4 : Soit $(f_n)_n \in \mathscr{C}([0,1])^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynômiales de degré N, qui converge uniformément vers une fonction g. Montrer que g est polynômiale, de degré inferieur ou égal à N.

b) Points fixes

Définition : application contractante, strictement contractante, uniformément strictement contractante.
Théorème : une application $f : X \to X$ uniformément strictement contractante avec X complet admet un unique point fixe, limite de toute suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$.
Application : Cauchy-Lipschitz (ou Picard-Lindelöf). Existence de solution locale pour $x' = f(x,t)$, $x'(0) = 0$, avec f continue, α-lipschitzienne par rapport à x sur $P = [-a,a] \times [-b,b]$. On considère $\Phi(x) = (t \mapsto \int_0^t f(x(s),s)ds)$ sur $\mathscr{C}([-c,c],[-a,a])$ avec $c < \alpha^{-1}$, $c < b$, $c < a/M$ où M est un majorant de f sur P.

Exemple. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et $|(\partial f/\partial x)(x,t)| < M$ pour tout (x,t), alors f est uniformément lipschitzienne par rapport à x. L'équation $x' = \exp(x^2+t^2)$ admet une unique solution sur $\left[-\frac{1}{18}, \frac{1}{18}\right]$ (en prenant $a = b = 1$).
Exercice 5 : Montrer que l'équation $x' = \cos(x+t)$ admet une unique solution sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

c) Prolongement et complétion

Définition : application uniformément continue. Lemme : image u-continue d'une suite de Cauchy, de deux suites telles que $d(x_n, y_n) \to 0$.
Proposition. Soit X un espace métrique, $Y \subset X$ une partie dense, X' un espace métrique complet, et $f : Y \to X'$ uniformément continue. Alors il existe une fonction uniformément continue $g : X \to X'$ telle que $g = f$ sur Y. Remarque : unicité.
Proposition. Soit (X, d) un espace métrique. Il existe un espace métrique complet (X', d') tel que X soit isométrique à une partie dense de X' (munie de la distance induite par d'). Remarque : unicité. Idée : on plonge x dans $C_b(X, \mathbb{R})$ par $\phi_x(y) = d(x,y) - d(x_0, y)$. Exemple : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$, remarque sur la définition de $\mathbb{R}$.
Proposition : le complété d'un evn E est un evn qui contient E comme un sous-espace dense. Exemples : espaces $\ell^p(\mathbb{R})$, $L^p(\mathbb{R})$.

Chapitre 4. Compacité et connexité

I Espaces compacts

a) Définition

Définition : sous-suites $(x_{\varphi(n)})_n$ ou $(x_{n'})_n$ de $(x_n)_n$, valeurs d'adhérences. Proposition : $(x_n)_n$ converge ssi toutes ses sous-suites convergent vers une même limite. Une suite de Cauchy converge ssi elle admet une sous-suite convergente. Proposition : x est va de $(x_n)_n$ ssi pour tout $\epsilon > 0$ il existe une infinité d'indices n tels que $d(x_n, x) \le \epsilon$. Exemples : $(n^2)_n$, $(1/n)_n$, $((-1)^n)_n$, $(\cos n)$ (en admettant la structure des sous-groupes de $\mathbb{R}$ et l'irrationnalité de π).
Exercice 1 : Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $1/(1+(-1)^n+1/n)$?
Définition : espace compact, localement compact. Remarque : distance topologiquement équivalentes, critère de Borel-Lebesgue, admis et non utilisé dans la suite, qui est la bonne définition pour les espaces topologiques généraux.
Exemple : d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, $[a,b]$ est compact. Démonstration utilisant la complétude de $\mathbb{R}$: étant donnée (x_k), on construit par dichotomie (a_n), (b_n) adjacentes avec $a_0 = a$, $b_0 = b$, et $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de (x_k).

b) Propriétés

Proposition. Si X est compact, X est complet. Si X est compact, X est borné (car les suites convergentes sont bornées).
Proposition ($Y \subset X$). Si Y est compact, Y est fermé. Si X est compact et Y est fermé, Y est compact. Proposition : produit fini de compacts.
Corollaire : dans un $(\mathbb{R}^n, N_\infty)$ de dimension finie, les compacts sont exactement les fermés bornés. Par équivalence des normes, cela reste vrai dans tout espace vectoriel normé de dimension finie.
Exemples : dans $\mathbb{R}^2$, $]0,1[^2$, $\mathbb{R} \times [0,1]$ ne sont pas compacts, $\{(x,y) \mid |x| + y^2 \le 1\}$ est compact.
Proposition : image continue d'un compact. Corollaire : une fonction continue sur un fermé borné de $\mathbb{K}^n$ est bornée et atteint ses bornes.
Exercice 2 : montrer que l'ensemble $\{x \exp(y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ admet un min et un max.

c) Applications

Théorème : équivalence des normes en dimension finie, par compacité.
Théorème de Heine : la continuité sur un compact est uniforme (par l'absurde et suites extraites).
Polynômes de Bernstein $B_n(f) = \sum_{k=0}^n f(k/n) C_n^k X^k (1-X)^{n-k}$. Lemme : $B_n(1) = 1$, $B_n(\mathrm{id}) = X$, $B_n(\cdot^2) = ((n-1)X^2 + X)/n$ (en utilisant $\frac{k}{n} C_n^k = C_{n-1}^{k-1}$), et en développant :

$$\sum_{k=0}^n (X - \tfrac{k}{n})^2 C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = X(1-X)/n.$$

Téorème de Stone-Weierstraß. On majore $|f(x) - B_n(f)(x)|$ en distinguant les termes $|x - \frac{k}{n}| \le \delta$, où δ est un module de continuité pour $\epsilon/2$, et en forçant l'utilisation de l'identité ci-dessus pour les autres termes.

II Espaces connexes

Remarque : topologie et distances induites. Les ouverts de la distance induite sur A sont exactement les intersections des ouverts avec A. Si A est un ouvert, ce sont exactement les ouverts inclus dans A.

a) Propriétés topologiques

Définition : espace connexe, partie connexe. Exemple : $[0,1] \cup [2,3]$ n'est pas connexe. Proposition : X est connexe ssi toute application continue de X dans $\{0,1\}$ est constante.

Exercice 3 : montrer que $\mathbb{R}$ privé d'un point n'est pas connexe.

Propositions. Une réunion de connexes qui se rencontrent deux-à-deux est connexe. L'image continue d'un connexe est connexe. La fermeture d'une partie connexe est connexe. Un produit cartésien d'espaces connexes est connexe.

Définition : composantes connexes.

Proposition. Les composantes connexes forment une partition en parties connexes et fermées.

Définition : espace discret, totalement discontinu. Exemples : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$.

b) Connexité et réels

Proposition : $\mathbb{R}$ est connexe. Corollaire : les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Application : Les ouverts de $\mathbb{R}$ sont réunions disjointes d'intervalles ouverts.

Application : Théorème des valeurs intermédiaires. Si X est connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ continue prend les valeurs a et b, alors elle prend toutes les valeurs entre a et b.

Définition : connexité par arcs. Remarque : connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe. On peut montrer que la réciproque est vraie pour les parties ouvertes dans les evn.

Exercice 4 : montrer que $\mathbb{R}^2$ privé d'un point est connexe par arcs.

Remarque. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ont tous les deux la « puissance du continu » : on peut trouver une bijection de l'un vers l'autre. Les exercices 3 et 4 montrent qu'on ne peut trouver de bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$ qui soit continue, ainsi que son inverse.

Pré-requis : continuité des formes linéaires à noyau fermé, complétude de $(\mathbb{K}^n, N_1)$, stabilité de la complétude par changement de norme équivalente.

Théorème. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors : i) toutes les normes sur E sont équivalentes, et ii) E est complet.

Démonstration. Montrons d'abord que i) $\Rightarrow$ ii), pour un evn $(E, \|\cdot\|)$ fixé. Soit (e_i) une base de E : elle définit un isomorphisme $f : \mathbb{K}^n \to E, (\lambda_i) \mapsto \sum \lambda_i e_i$. Transportons la norme N_1 de $\mathbb{K}^n$ sur E via f, i.e. on pose $\|\sum \lambda_i e_i\|_1 = \sum |\lambda_i|$. Alors f est un isomorphisme isométrique entre $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(\mathbb{K}^n, N_1)$ qui est complet, donc $(E, \|\cdot\|_1)$ est complet. Comme toutes les normes sur E sont équivalentes, $(E, \|\cdot\|)$ est également complet.
Pour montrer i) on procède par récurrence sur $n = \dim E$. Pour $n = 1$ on a un résultat plus fort : les normes sur $E = D$ sont multiples l'une de l'autre. En effet, soit $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur D, et e un vecteur directeur de D. Tout vecteur $v \in D$ s'écrit sous la forme $v = \lambda e$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, on a alors $\|v\| = |\lambda|\|e\|$ et $\|v\|' = |\lambda|\|e\|'$, donc $\|v\| = \|v\|' \times (\|e\|/\|e\|')$ pour tout v. Cela montre également que $(D, \|\cdot\|)$ est isométriquement isomorphe à $\mathbb{K}$, muni de sa norme canonique, via l'application $(\lambda \mapsto \lambda e/\|e\|)$.
Supposons maintenant le résultat démontré pour tout $\mathbb{K}$-evn de dimension n, et soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension $n+1$. Fixons également une décomposition $E = H \oplus D$, où D est de dimension 1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E. On va montrer que $\|\cdot\|$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\|v\|_1 = \|h\| + \|d\|$, où $v = h + d$ est l'unique décomposition de v dans la somme directe $H \oplus D$. Comme toutes les normes sur H sont équivalentes par hypothèse de récurrence, cela démontrera que toutes les normes sont équivalentes sur E. Remarquons qu'une inégalité est claire : on a $\|v\| = \|h + d\| \leq \|h\| + \|d\| = \|v\|_1$.
Notons p la projection sur D associée à la décomposition $E = H \oplus D$, i.e. $p(h + d) = d$. Comme la droite D est de dimension 1, elle est isométriquement isomorphe à $\mathbb{K}$, donc p s'interprète également comme une forme linéaire sur E. Son noyau est clairement H. Par hypothèse de récurrence, H est complet, donc fermé dans E. Donc p est bornée. On a alors $\|v\|_1 = \|(1 - p)(v)\| + \|p(v)\| \leq \|v\| + 2\|p(v)\| \leq (1 + 2\|p\|)\|v\|$. □

La preuve reste valable pour tout K-ev de dimension finie, où K est un corps valué complet non discret. Par exemple le corps des séries formelles de Laurent $K = k((x))$ est complet pour tout corps k, mais n'est localement compact que si k est fini.

Lemme. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $M = \sup A$. Si A est fermé, $M \in A$. Si A est ouvert, $M \notin A$.

Proposition. $\mathbb{R}$ est connexe.

Démonstration. En effet le Lemme montre que $\mathbb{R}$ ne contient pas de partie non vide, majorée, ouverte et fermée. Supposons maintenant que $A \subset \mathbb{R}$ est une partie ouverte et fermée, différent de $\emptyset$ et de $\mathbb{R}$. Soit $a \in A$ et $b \notin A$, et supposons par exemple $a < b$. Alors $A' = A \cap]-\infty, b] = A \cap]-\infty, b[$ est ouverte, fermée, non vide, majorée, ce qui est impossible. $\square$

Corollaire. Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration. Tout intervalle est connexe car il peut s'écrire à partir d'images continues de $\mathbb{R}$. Par exemple $[-1, 1] = \{\max(-1, \min(1, x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $]-1, 1[= \{x/(1 + |x|) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Par des transformations affines on obtient tous les intervalles de ces types, puis en faisant des réunions on obtient les autres types : par exemple $]a, b] =]a, b[\cup [c, b]$ si $c \in]a, b[$, et $]a, +\infty[= \bigcup_n]a, a + n[$. Inversement, soit I une partie connexe non vide de $\mathbb{R}$. Posons $a = \inf I$ ou $-\infty$, $b = \sup I$ ou $+\infty$, de sorte que I est contenu dans l'adhérence de $]a, b[$. Il suffit de montrer que $]a, b[\subset I$. Supposons que ce n'est pas le cas, et fixons $x \in]a, b[$ qui n'est pas dans I. Alors I est la réunion disjointe de $I \cap]-\infty, x[$ et $I \cap]x, +\infty[$, qui sont deux ouverts de I, donc I est contenu dans un des deux intervalles, par exemple $]x, +\infty[$. Mais alors $\inf I \geq x > a$, ce qui contredit la définition de a. $\square$

Corollaire. Tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit comme réunion disjointe d'intervalles ouverts.

Démonstration. On écrit U comme réunion disjointe de ses composantes connexes, qui sont des intervalles. Supposons que l'un de ces intervalles, disons $]a, b]$, n'est pas ouvert, et soit $\epsilon > 0$ tel que $]b - \epsilon, b + \epsilon[\subset U$. Alors $]a, b + \epsilon[$ est une partie connexe de U, ce qui contredit le fait que $]a, b]$ soit une composante connexe de U. $\square$

Démonstrations à apprendre pour le partiel

Proposition. Soit (A, d) un espace métrique et X une partie de A. Pour tous points a, b de A on a $|d(a, X) - d(b, X)| \leq d(a, b)$.

Proposition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique définie-positive $B(v, w) = v \cdot w$, et $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ la forme quadratique associée. On a l'inégalité de Cauchy-Schwartz : $|v \cdot w| \leq \|v\| \times \|w\|$. De plus $\| \cdot \|$ est une norme sur E.

Proposition. Soit E, F deux espaces vectoriels normés, et $L'(E, F)$ l'espace des applications linéaires bornées de E vers F. La norme d'opérateur définit une norme sur $L'(E, F)$.

Proposition. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On note $\|T\|$ la norme d'opérateur de $T \in L'(E)$. Pour tous S, $T \in L'(E)$ on a $\|S \circ T\| \leq \|S\| \times \|T\|$.

Proposition. Soit (A, d), (A', d') des espaces métriques et $a \in A$. Une application $f : A \to A'$ est continue en a si et seulement si on a $\lim f(x_n) = f(a)$ pour tout suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers a.

Proposition. Soit (A, d) un espace métrique. Une partie $X \subset A$ est ouverte si et seulement si $X \cap \mathrm{Fr}(X) = \emptyset$, fermée si et seulement si $\mathrm{Fr}(X) \subset X$.

Proposition. Soit (A, d) un espace métrique. La réunion d'un nombre quelconque d'ouverts de A est un ouvert. L'intersection d'un nombre fini d'ouverts de A est un ouvert.

Proposition. Soit A, B des espaces métriques. Une application $f : A \to B$ est continue sur A si et seulement $f^{-1}(Y)$ est un ouvert de A pour tout ouvert $Y \subset B$.

Démonstrations à apprendre pour l'examen

Proposition. Soit X, Y des espaces métriques. Une application $f : X \to Y$ est continue sur X si et seulement $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X pour tout ouvert $O \subset Y$.

Proposition. Soit E, F des espaces vectoriels normés. Une application linéaire $f : E \to F$ est continue **ssi** elle est bornée.

Proposition. Soit E un espace vectoriel normé. Une forme linéaire $\varphi \in E^*$ est continue **ssi** son noyau est fermé.

Proposition. Soit X_1, ..., X_n des espaces métriques complets. Alors le produit cartésien $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, muni d'une distance produit, est complet.

Proposition. Soit X, Y des espaces métriques et $f : X \to Y$ une application continue. Si X est compact, alors $f(X)$ est compact pour la distance induite par celle de Y.

Proposition. Soit X, Y des espaces métriques compacts. Alors $X \times Y$, muni d'une distance produit, est compact.

Proposition. (Théorème de Heine) Soit X, Y des espaces métriques et $f : X \to Y$ une application continue. Si X est compact, alors f est uniformément continue.

Proposition. Soit X un espace métrique. L'ensemble des composantes connexes de X forme une partition de X en parties connexes et fermées.