Espaces métriques
Corrigé du partiel

Exercice 1.

1. On a clairement $P(0) = 0$. Réciproquement, si $P(M) = 0$, la somme de réels positifs $|a|+|b|+|c|+|d|+|e|+|f|$ est nulle, donc $a = b = c = d = e = f = 0$, donc $M = 0$.
Si λ est un scalaire, on a
$$P(\lambda M) = |\lambda a| + |\lambda b| + |\lambda c| + |\lambda d| + |\lambda e| + |\lambda f| = |\lambda| \times (|a| + |b| + |c| + |d| + |e| + |f|) = |\lambda| P(M).$$
Enfin, si M' est une autre matrice de coefficients a', b', c', d', e', f', on peut écrire, en utilisant l'inégalité triangulaire pour les réels :
$$\begin{aligned} P(M+M') &= |a+a'| + |b+b'| + |c+c'| + |d+d'| + |e+e'| + |f+f'| \\ &\le |a| + |a'| + |b| + |b'| + |c| + |c'| + |d| + |d'| + |e| + |e'| + |f| + |f'| = P(M) + P(M'). \end{aligned}$$
On a ainsi montré que P est une norme.
2. On a $f(x,y) = (ax+by, cx+dy, ex+fy)$. Rappelons qu'on a $|x| \le \sqrt{x^2+y^2} = N_2(x,y)$, et de même $|y| \le N_2(x,y)$. On peut donc écrire, en utilisant l'inégalité triangulaire pour les réels :
$$\begin{aligned} N_1(f(x,y)) = N_1(ax+by, cx+dy, ex+fy) &= |ax+by| + |cx+dy| + |ex+fy| \\ &\le |a||x| + |b||y| + |c||x| + |d||y| + |e||x| + |f||y| \\ &\le (|a| + |b| + |c| + |d| + |e| + |f|) N_2(x,y) = P(M) N_2(x,y). \end{aligned}$$
Par définition de la norme d'opérateur, cela montre que $\|f\| \le P(M)$.
3. a. Dans ce cas on a $P(M) = 7$, on en déduit donc $\|f\| \le 7$.
   b. On a $N_1(f(4,-1)) = N_1(3,9,5) = 17$ et $N_2(4,-1) = \sqrt{17}$. On en déduit donc que
$$\|f\| = \sup_{v \ne 0} \frac{N_1(f(v))}{N_2(v)} \ge \frac{N_1(f(4,-1))}{N_2(4,-1)} = \sqrt{17}.$$
4. a. On utilise l'inégalité triangulaire pour les réels, puis l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans $\mathbb{R}^2$:
$$|X| + |Y| + \frac{1}{2}|X+3Y| \le \frac{3}{2}|X| + \frac{5}{2}|Y| \le \sqrt{(3/2)^2 + (5/2)^2}\sqrt{X^2+Y^2} = \sqrt{17/2}\sqrt{X^2+Y^2}.$$
   b. En appliquant l'inégalité précédente à $X = x+y$, $Y = x-y$, on obtient
$$\begin{aligned} N_1(f(x,y)) = |x+y| + |2x-y| + |x-y| &= |X| + \tfrac{1}{2}|X+3Y| + |Y| \\ &\le \sqrt{17/2}\sqrt{(x+y)^2 + (x-y)^2} = \sqrt{17} N_2(x,y). \end{aligned}$$
   Cela montre que $\|f\| \le \sqrt{17}$, et l'inégalité opposée a déjà été obtenue à la question 3b.

Exercice 2.

1. Posons $f(x) = \sin(\exp(x))$, on a alors
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \left]\tfrac{1}{2}, +\infty\right[\right\} = f^{-1}\left(\left]\tfrac{1}{2}, +\infty\right[\right).$$
L'application f est continue comme composée d'applications continues, et $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ est un intervalle ouvert, donc A est ouvert.
2. Comme précédemment, $B_k = \exp^{-1}\left(\left]k + \frac{1}{2}, k+1\right[\right)$, donc B_k est ouvert.
Si $\exp(x) \in \left]k+\frac{1}{2}, k+1\right[$, on a en particulier $\exp(x) \in [k, k+1[$ donc $E(\exp(x)) = k$, et par conséquent $F(\exp(x)) = \exp(x) - k > k + \frac{1}{2} - k = \frac{1}{2}$. Cela montre que $B_k \subset B$ pour tout k, donc $\bigcup B_k \subset B$.
Démontrons l'inclusion réciproque. Fixons $x \in B$ et posons $k = E(\exp(x))$. On a $F(\exp(x)) = \exp(x) - k > \frac{1}{2}$, donc $\exp(x) > k + \frac{1}{2}$. Par ailleurs $\exp(x) < E(\exp(x)) + 1 = k + 1$. Donc $x \in B_k$, et on a montré que $B \subset \bigcup B_k$.
3. D'après la question précédente, B est une réunion d'ouverts, donc c'est un ouvert. On ne pouvait pas procéder comme à la question 1 car F n'est pas continue.

Exercice 3.

1. On a clairement $\|0\| = 0$. Inversement, supposons $\|f\| = \sup|tf(t)| = 0$. Cela implique que $tf(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$, et en particulier $f(t) = 0$ pout $t \neq 0$. De plus comme f est continue on a $f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = 0$. Donc f est bien la fonction nulle sur $[0,1]$.
Si λ est un scalaire on a clairement
$$\|\lambda f\| = \sup|t\lambda f(t)| = |\lambda|\sup|tf(t)| = |\lambda|\|f\|.$$
Enfin pour f, $g \in E$ on peut écrire
$$\|f+g\| = \sup|tf(t)+tg(t)| \le \sup(|tf(t)|+|tg(t)|) \le \sup|tf(t)| + \sup|tg(t)| = \|f\| + \|g\|.$$
On a ainsi montré que $\|\cdot\|$ est une norme.
2. Par définition de la norme sur E, on a $|tf(t)| \le \|f\|$ pour toute $f \in E$ et tout $t \in [0,1]$. On peut donc écrire
$$|\varphi(f)| = \Big|\int_0^1 t^2 f(t)dt\Big| \le \int_0^1 t|tf(t)|dt \le \|f\| \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}\|f\|.$$
Cela montre que φ est bornée (et que sa norme d'opérateur est majorée par $\frac{1}{2}$).
3. a. Pour tout $t \in [0,1]$ on a
$$0 \le tf_n(t) = \frac{t}{t+\frac{1}{n}} \le 1,$$
donc $\|f_n\| = \sup|tf_n(t)| \le 1$. Par ailleurs $\psi(f_n) = f_n(0) = n$.
   b. Si ψ était bornée, on aurait $n = |\psi(f_n)| \le \|\psi\|\|f_n\| \le \|\psi\|$ pour tout n, ce qui est clairement impossible.

Exercice 4.

1. a. L'inégalité triangulaire pour d permet d'écrire
$$d_\circ(x,z) = \min(d(x,z), 1-d(x,z)) \le d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z).$$
   b. On procède de même en utilisant le membre de gauche de l'inégalité triangulaire pour d :
$$\begin{aligned} d_\circ(x,z) &= \min(d(x,z), 1-d(x,z)) \le 1-d(x,z) \le 1-|d(x,y)-d(y,z)| \\ &\le 1-(d(x,y)-d(y,z)) = (1-d(x,y)) + d(y,z). \end{aligned}$$
2. Commençons par l'inégalité triangulaire. On veut montrer que $d_\circ(x,z) \le d_\circ(x,y) + d_\circ(y,z)$. On fait quatre cas selon les deux valeurs possibles pour $d_\circ(x,y)$ et $d_\circ(y,z)$ en fonction de d. Dans les quatre cas l'inégalité est vérifiée grâce aux questions 1a, 1b et aux inégalités admises.
Par ailleurs la symétrie de d entraîne clairement celle de $d_\circ$:
$$d_\circ(y,x) = \min(d(y,x), 1-d(y,x)) = \min(d(x,y), 1-d(x,y)) = d_\circ(x,y).$$
Enfin, observons que pour x, $y \in [0,1[$ on a $d(x,y) \in [0,1[$. On a ainsi $d(x,y) \ge 0$ et $1-d(x,y) > 0$, donc le minimum de ces deux nombres est nul si et seulement si $d(x,y) = 0$, ce qui équivaut encore à $x = y$.
3. On a $d_\circ(x_n, 0) = \min(1-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ dès que $n \ge 2$. On a ainsi $\lim d_\circ(x_n,0) = 0$, donc $\lim x_n = 0$ pour $d_\circ$.
En revanche la suite (x_n) ne converge pas vers 0 relativement à d, car $d(x_n, 0) = 1-\frac{1}{n} \to 1$. Donc les distances d et $d_\circ$ ne sont pas équivalentes.
4. a. Supposons que $\lim x_n = x$ dans X muni de d, c'est-à-dire que $\lim d(x_n,x) = 0$. On a par définition $0 \le d_\circ(x_n,x) \le d(x_n,x)$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim d_\circ(x_n,x) = 0$. Ainsi x_n converge vers x relativement à $d_\circ$.
   b. On suppose que $\lim d_\circ(x_n,x) = 0$ avec $x \neq 0$. Comme $x \neq 0$, on a $d_\circ(x,0) > 0$ et en particulier $d_\circ(x_n,x) < d_\circ(x,0)$ pour n assez grand. On peut en déduire qu'alors $d_\circ(x_n,x) = d(x_n,x)$: sinon on aurait $d_\circ(x_n,x) = 1-d(x_n,x)$, or la minoration suivante montre qu'on a toujours $1-d(x_n,x) \ge d_\circ(x,0)$.
$$\begin{aligned} 1-d(x_n,x) &= 1-\max(x_n-x, x-x_n) = \min(1-x_n+x, 1-x+x_n) \\ &\ge \min(x, 1-x) = d_\circ(x,0), \quad \text{car } 1-x_n \ge 0 \text{ et } x_n \ge 0. \end{aligned}$$
On a ainsi montré que $d_\circ(x_n,x) = d(x_n,x)$ pour n assez grand. Comme par hypothèse $\lim d_\circ(x_n,x) = 0$, on en déduit que x_n converge vers x relativement à d.