Université de Caen
UFR Sciences
L3 Maths

EM51
2011-2012
1^{er} semestre

Espaces métriques
Examen partiel

lundi 17 octobre 2011

Documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

Durée : 3 heures.

Question de cours.

1. Soit (A, d), (A', d') des espaces métriques et $a \in A$. Soit $f : A \to A'$ une application.
   Montrer que f est continue en a si et seulement si on a $\lim f(x_n) = f(a)$ pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers a.
2. Donner un exemple d'une suite d'ouverts U_n dans $\mathbb{R}$ telle que l'intersection $U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire, et M sa matrice dans les bases canoniques. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme N_2, $\mathbb{R}^3$ de la norme N_1, et on note $\|f\|$ la norme d'opérateur associée pour f. Par ailleurs on pose

$$P(M) = |a| + |b| + |c| + |d| + |e| + |f| \quad \text{si} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est une norme sur $M_{3,2}(\mathbb{R})$.
2. Exprimer $f(x, y)$ en fonction de a, b, c, d, e, f, x, y. En déduire que $\|f\| \leq P(M)$.
3. On prend $f(x, y) = (x + y, 2x - y, x - y)$.
   a. À l'aide de la question 2, donner un majorant pour $\|f\|$.
   b. En calculant $f(4, -1)$ donner un minorant pour $\|f\|$.
4. *Cette question est moins facile.*
   On conserve la fonction f de la question 3.
   a. Démontrer l'inégalité $|X| + |Y| + \frac{1}{2}|X + 3Y| \leq \sqrt{\frac{17}{2}}\sqrt{X^2 + Y^2}$, pour tous X, $Y \in \mathbb{R}$.
   b. En posant $X = x + y$, $Y = x - y$, montrer que $\|f\| = \sqrt{17}$.

suite au verso

Exercice 2. On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(\exp(x)) > \tfrac{1}{2}\}.$$

1. Exprimer A comme image réciproque d'un intervalle et en déduire que A est ouvert.

Pour tout réel x on note $E(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x, et $F(x) = x - E(x)$ la partie fractionnaire de x. On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}$:

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid F(\exp(x)) > \tfrac{1}{2}\}.$$

2. Soit $k \in \mathbb{Z}$ un entier relatif fixé. Montrer que la partie suivante de $\mathbb{R}$ est ouverte :

$$B_k = \{x \in \mathbb{R} \mid k + \tfrac{1}{2} < \exp(x) < k + 1\}.$$

   Montrer avec soin que $B = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} B_k$.
3. Montrer que B est ouvert.
   Pourquoi ne peut-on pas procéder comme à la question 1 ?

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel $E = C([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0,1]$.
Pour $f \in E$ on pose $\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |tf(t)|$.
On définit par ailleurs des formes linéaires φ, $\psi \in E^*$ en posant

$$\varphi(f) = \int_0^1 t^2 f(t)dt \quad \text{et} \quad \psi(f) = f(0).$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
2. Montrer que la forme linéaire φ est bornée.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère $f_n \in E$ donnée par $f_n(t) = (t + \frac{1}{n})^{-1}$.
   a. Montrer que $\|f_n\| \le 1$ et calculer $\psi(f_n)$ pour tout n.
   b. La forme linéaire ψ est-elle bornée ?

Exercice 4. On considère l'ensemble $X = [0,1[$.
On note $d(x,y) = |x-y|$ la distance induite sur X par la distance usuelle de $\mathbb{R}$. On pose par ailleurs

$$d_\circ(x,y) = \min(d(x,y), 1 - d(x,y)).$$

1. Soit x, y, $z \in X$.
   a. Montrer que $d_\circ(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.
   b. Montrer que $d_\circ(x,z) \le (1 - d(x,y)) + d(y,z)$.

On admet que $d_\circ(x,z) \le d(x,y) + (1 - d(y,z))$ et que $d_\circ(x,z) \le (1 - d(x,y)) + (1 - d(y,z))$.

2. Montrer que $d_\circ$ est une distance sur X.
3. On considère la suite $x_n = 1 - \frac{1}{n} \in X$.
   Montrer que $\lim x_n = 0$ relativement à $d_\circ$. Les distances d et $d_\circ$ sont-elles équivalentes ?
4. On considère maintenant une suite quelconque d'éléments $x_n \in X$.
   a. Montrer que si $\lim x_n = x$ relativement à d, alors $\lim x_n = x$ relativement à $d_\circ$.
   b. *Cette question est plus difficile.*
   Montrer que si $\lim x_n = x$ relativement à $d_\circ$, avec $x \neq 0$, alors $\lim x_n = x$ relativement à d.