Topologie

Exercice 1. Dire si les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont ouverts, fermés, ou ni l'un ni l'autre, en justifiant :

a. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$
b. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$
c. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2\}$
d. $([2,3] \cup \{0\}) \times [-1,1]$
e. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ et } y = \frac{1}{x^2}\}$
f. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - xy > 0\}$
g. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x^2+y^2) \geq 0\}$
h. $\mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$
i. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1,\ y \leq 2 \text{ et } x - y \geq 0\}$
j. $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
k. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1,0)\}$
l. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 - (x^2+y^2) = 0\}$

Montrer que le dernier ensemble est encore fermé lorsqu'on lui enlève le point $(0,0)$.

Exercice 2. Déterminer la frontière, l'adhérence et l'intérieur des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^n$:

a. $]0,1] \subset \mathbb{R}$
b. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
c. $\{(x,y) \mid x^2 \leq y < x+2\} \subset \mathbb{R}^2$
d. $\{(\cos t, \sin t)\} \subset \mathbb{R}^2$
e. $\{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$
f. $\{(t, \sin(1/t)) \mid t \in \mathbb{R}_+^*\}$

Exercice 3. On se place dans $E =]-\infty, 0] \cup [1,2] \cup]3, +\infty[$, muni de la distance induite par la distance usuelle de $\mathbb{R}$. On note $B_o = B(1,1)$ (resp. $B_f = \bar{B}(1,1)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre 1 et rayon 1.

a. Expliciter les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$B_o,\quad \mathring{B}_o,\quad \overline{B_o},\quad B_f,\quad \overline{B_f},\quad \mathring{B}_f,\quad \mathrm{Fr}\, B_o,\quad \mathrm{Fr}\, B_f.$$

Maintenant E est un espace vectoriel normé. On fixe $a \in E$, $r > 0$ et on note $B_o = B(a,r)$ (resp. $B_f(a,r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre a et rayon r.

b. Montrer que $\overline{B_o} = B_f$ et $\mathring{B}_f = B_o$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé et A, $B \subset E$.

a. Montrer que le complémentaire de $\mathring{A}$ est la fermeture de ${}^c\!A$.
Montrer que le complémentaire de $\overline{A}$ est l'intérieur de ${}^c\!A$.

b. (i) Montrer que $\mathrm{Fr}\,\overline{A} \subset \mathrm{Fr}\, A$ et $\mathrm{Fr}\,\mathring{A} \subset \mathrm{Fr}\, A$.
(ii) Donner un exemple où les inclusions précédentes sont strictes.

c. (i) Montrer que $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}\, A \cup \mathrm{Fr}\, B$.
(ii) Donner un exemple où l'inclusion précédente est stricte.
(iii) Montrer qu'il y a égalité lorsque $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

d. (i) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
(ii) Donner un exemple où l'inclusion précédente est stricte.
(iii) Montrer qu'il y a égalité lorsque $\mathrm{Fr}\, A \cap \mathrm{Fr}\, B = \emptyset$.

Exercice 5. Soit $X = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ muni de la distance $\delta(A,B) = (\min(A \bigtriangleup B))^{-1}$.

a. Montrer que le sous-ensemble $Y = \mathcal{P}_f(\mathbb{N}^*)$ des parties finies de $\mathbb{N}^*$ est dense dans X.

b. Montrer que l'application $f : X \to X$, $A \mapsto {}^c\!A$ est continue.

c. Soit $A \in X$. Montrer que le sous-ensemble $\{B \in X \mid A \subset B\}$ de X est fermé, et ouvert si A est finie.

d. On munit $X \times X$ de la distance produit δ_∞.
Montrer que l'application $g : X \times X \to X$, $(A,B) \mapsto A \cap B$ est continue.

e. Soit A, B deux sous-ensembles de $\mathbb{N} \cap]n, +\infty[$.
Décrire les éléments des boules ouvertes $B(A, 1/n)$ et $B(B, 1/n)$.

f. Montrer que la propriété constatée à la question précédente est valable pour tout rayon $r > 0$ et tous points A, B d'un espace ultramétrique tels que $\delta(A,B) < r$.

g. Montrer qu'au contraire, dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé on a $B(a,r) = B(a',r') \Rightarrow a = a'$ et $r = r'$.

Exercice 6. On se place dans $\mathbb{R}$, muni de la distance usuelle. On fixe un ouvert $U \subset \mathbb{R}$. Pour tout $x \in U$, on note I_x la réunion des intervalles ouverts contenant x et contenus dans U.

a. Montrer que I_x est de la forme $]a, b[$ avec $a,\, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

b. Montrer que si I_x rencontre I_y, alors $I_x = I_y$.

c. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux-à-deux disjoints.
On pourra remarquer que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un rationnel.

d. Soit $F \subset \mathbb{R}$ un fermé. Montrer qu'il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $F = f^{-1}(\{0\})$.
On pourra commencer par le cas où ${}^cF$ est un intervalle ouvert.

Exercice 7. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$ non vide.

a. Montrer que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ pour tous $x,\, y \in E$.
En déduire que l'application $d_A : E \to \mathbb{R},\, x \mapsto d(x, A)$ est continue.

b. On note $A_r = \{x \in E \mid d(x, A) < r\}$. Montrer que A_r est ouvert. Déterminer $\bigcap_{r>0} A_r$ en fonction de A.
Montrer que tout fermé de E est intersection dénombrable d'ouverts.

c. Soit $F_1,\, F_2$ deux fermés disjoints de E. En considérant l'application $(x \mapsto d(x, F_1) - d(x, F_2))$, montrer qu'il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $F_1 \subset O_1$ et $F_2 \subset O_2$.

Exercice 8. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|(m_{ij})_{ij}\| = \max_{i,j} |m_{ij}|$.
On note $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices symétriques.

a. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

b. Soit $V \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on note $F_\lambda(V) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AV = \lambda V\}$.
Montrer que $F_\lambda(V)$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

c. Soit $V \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne. On note $G(V) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AV \in \mathbb{R}V\}$.
Montrer que $G(V)$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|(m_{ij})_{ij}\| = \max_{i,j} |m_{ij}|$.
Rappelons qu'on note $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices inversibles.

a. Montrer que l'application déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue.

b. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

c. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice. On note $\chi_A = \det(A - XI)$ le polynôme caractéristique de A.
  (i) Quel est le degré de χ_A ? Que peut-on dire de l'ensemble des racines de χ_A ?
  (ii) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que χ_A ne s'annule pas sur $]-\epsilon, \epsilon[$, sauf peut-être en 0.

d. Montrer que $\lim_{t\to 0}(A - tI) = A$.
En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

e. Application. On admet que la fonction qui à $A \in M_n(\mathbb{R})$ associe $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_n$ est continue.
  (i) Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ si A est inversible.
  (ii) En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour toutes matrices $A,\, B \in M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé et $\varphi \in E^*$ une forme linéaire non bornée sur E.

a. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\ \|x_n\| = 1$ et $\lim_{n\to\infty} |\varphi(x_n)| = +\infty$.

b. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\ \varphi(x_n) = 1$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

c. Soit $y \in E$ tel que $\varphi(y) = 1$.
Montrer qu'il existe une suite $(z_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\ \varphi(z_n) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} z_n = y$.

d. Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi$ est dense dans E.

Exercice 11. On considère $E = C^1([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

a. Soit $f \in E$ une fonction telle que $\forall g \in E\ \ \int_{-1}^{1} fg = 0$. Montrer que $f = 0$.

b. Montrer que $\varphi : E \to \mathbb{R}, f \mapsto f'(0)$ n'est pas continue.

c. Montrer que $F = \{f \in E \mid f'(0) = 0\}$ est dense dans E.

d. Soit $f \in E$ une fonction telle que $\forall g \in F\ \ \int_{-1}^{1} fg = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 12. Dans cet exercice on va montrer qu'un sous-groupe G de $(\mathbb{R}, +)$ est soit de la forme $r\mathbb{Z}$ avec $r \in \mathbb{R}$, soit dense dans $\mathbb{R}$. On suppose $G \neq \{0\}$ et on pose $r = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.

a. On suppose que la borne inférieure r est atteinte.
  (i) En écrivant $a \in G$ sous la forme $a = kr + x$ avec $x \in [0, r[$, montrer que $G = r\mathbb{Z}$.
  (ii) Montrer que G est fermé dans $\mathbb{R}$.

b. On suppose que la borne inférieure r n'est pas atteinte. On fixe $\epsilon > 0$.
  (i) Montrer qu'il existe $a,\, b \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tels que $|a - b| < \epsilon$.
  (ii) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in G$ tel que $|x - c| < \epsilon$. Conclure.