Espaces métriques
Examen partiel

lundi 15 octobre 2012

Documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

Durée : 3 heures.

Question de cours.
Soit (E, N) un espace vectoriel normé non nul. On note $\ell^1(\mathbb{N}, E)$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E telles que la série $(\sum_n N(x_n))$ converge.

1. Montrer que $\ell^1(\mathbb{N}, E)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les suites à valeurs dans E.
2. Montrer que la formule $N_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} N(x_n)$ définit une norme sur $\ell^1(\mathbb{N}, E)$.
3. Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}, E)$ on dispose aussi de la norme $N_\infty(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} N(x_n)$.
   Les normes N_1 et N_∞ sont-elles équivalentes sur $\ell^1(\mathbb{N}, E)$? Justifier.

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$.
On considère sur E la norme $N_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et une norme quelconque $N : E \to \mathbb{R}$.
Pour $f \in L(E)$ on note $P(f) = \|f\|_{N_1\to N}$ la norme d'opérateur de f relativement à N_1 et N, et on pose

$$N'(f) = \sum_{i=1}^n N(f(e_i)).$$

1. Montrer que N' est une norme sur $L(E)$.
2. a. Montrer que pour tout vecteur $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ on a $N(f(x_1, \ldots, x_n)) \le N'(f) \sum_{i=1}^n |x_i|$.
   b. Montrer que pour tout $f \in L(E)$ on a $P(f) \le N'(f) \le nP(f)$.
3. Dans cette question on montre que les inégalités de la question 2b sont optimales.
   a. Soit $v \in E$ tel que $N(v) = 1$. On considère l'endomorphisme $f : E \to E$ donné par $f(e_i) = v$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Déterminer $N'(f)$ et $P(f)$.
   b. On considère l'endomorphisme $p : E \to E$ donné par $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, 0, \ldots, 0)$.
   Déterminer $N'(p)$ et $P(p)$ en fonction de $N(e_1)$.
4. Dans cette question on étudie un cas particulier. On prend $n = 3$ et $N = N_2$ donnée par

$$N_2(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

   On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par la formule $f(x, y, z) = (3y, 3x + z, x + 3z)$.
   Montrer que $P(f) = \sqrt{10}$ et déterminer $N'(f)$.

(suite au verso)

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique et a un point de X.
Pour tout $x \in X$ on pose $d'(x,x) = 0$, et $d'(x,y) = \max(d(a,x), d(a,y))$ pour tous $x \neq y$ dans X.

1. Montrer que d' est une distance sur X.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X.
   a. Montrer que $(x_n)_n$ converge vers a relativement à d si et seulement si $(x_n)_n$ converge vers a relativement à d'.
   b. On suppose que $(x_n)_n$ converge au sens de d' vers un point $l \in X$ différent de a.
   Montrer qu'on a $x_n = l$ à partir d'un certain rang.
3. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application quelconque.
   Montrer que f est continue relativement à d' en tout point $x \in X$ différent de a.
4. On suppose $X = \mathbb{R}$, muni de la distance usuelle d. La distance d' est-elle équivalente à d ?

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel $E = C([0,\pi], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues définies sur $[0,\pi]$. Pour $f \in E$ on pose

$$N_\infty(f) = \sup_{t\in[0,\pi]} |f(t)| \quad \text{et} \quad P(f) = \int_0^\pi |\sin(t)f(t)|\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que P est une norme sur E.
2. Les normes N_∞ et P sont-elles équivalentes ?
   On pourra considérer les fonctions $f_n : t \mapsto t^n/\pi^n$.

On considère les applications linéaires S et $D : E \to E$ définies par

$$S(f) = (t \mapsto f(\pi - t)) \quad \text{et} \quad D(f) = (t \mapsto f(t/2)).$$

3. Montrer que S est un opérateur borné relativement à N_∞ (au départ et à l'arrivée).
   Déterminer la norme d'opérateur $\|S\|$ correspondante.
4. Montrer que S et D sont des opérateurs bornés relativement à P (au départ et à l'arrivée).
   Montrer que la norme d'opérateur $\|D\|$ relative à P est comprise entre 1 et 4.

On considère la forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^\pi \cos(t)f(t)\mathrm{d}t$.

5. Montrer que φ est une forme linéaire bornée relativement à N_∞.
6. La forme linéaire φ est-elle bornée relativement à P ?
   On pourra considérer les fonctions $g_n : t \mapsto (\cos t)^n$. On admettra que $W_n = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}(\cos t)^n\mathrm{d}t$ tend vers $\sqrt{\pi/2}$ quand n tend vers $+\infty$ (intégrales de Wallis).