Logique élémentaire

[*Connecteurs logiques*]

Exercice 1. Compléter avec le connecteur logique $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$:

a. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 = 4 \Leftarrow ? \Rightarrow x = 2$.

b. Pour $z \in \mathbb{C}$ on a $z = \bar{z} \Leftarrow ? \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.

c. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $x = \pi \Leftarrow ? \Rightarrow e^{2ix} = 1$.

d. Pour $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+$ on a $x = \sqrt{y} \Leftarrow ? \Rightarrow x^2 = y$.

Exercice 2. On considère trois assertions P, Q, R, et on constuit les assertions A et B suivantes :

$$A : (P \Rightarrow Q) \Rightarrow R, \quad B : P \Rightarrow (Q \Rightarrow R).$$

a. Les assertions A et B sont-elles équivalentes ?
On distinguera 8 cas selon que P, Q, R sont vraies ou fausses.

b. Réécrire A et B à l'aide des connecteurs `et` et `ou`.

c. La valeur de A et B dépend-elle de x, y dans le cas suivant ?

$$P : (x = 0), \quad Q : (xy = 0), \quad R : (x = 0).$$

[*Négation et contraposée*]

Exercice 3. Énoncer la négation des assertions suivantes :

a. Tout triangle rectangle possède un angle droit.

b. Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.

c. Il pleut et il y a du vent.

d. Quand il pleut, je prends mon parapluie.

e. Tous les habitants de Caen qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans.

Exercice 4. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Écrire les énoncés suivants avec des quantificateurs, puis écrire leur négation :

a. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y > x$ on a $f(x) > f(y)$.

b. L'application f est paire.

c. L'application f est majorée.

d. L'application f est strictement croissante.

Exercice 5. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, puis écrire leur négation.

a. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ x + y > 0$.

b. $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ x + y > 0$.

c. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ y^2 > x$.

d. $\forall \epsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ |x[< \alpha \Rightarrow |x^2| < \epsilon$.

Exercice 6. Écrire les contraposées des implications suivantes, puis les démontrer.

a. $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

b. n^2 impair $\Rightarrow n$ impair.

c. n premier $\Rightarrow n = 2$ ou n est impair.

d. 8 ne divise pas $n^2 - 1 \Rightarrow n$ pair.

[*Récurrence*]

Exercice 7. Démontrer les assertions suivantes par récurrence :

a. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

c. $4^n - 1$ est multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère la propriété $P_n : 2^n > n^2$.

a. On fixe $n \geq 3$. Montrer que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

b. Pour quelles valeurs de n la propriété P_n est-elle vraie ?

Exercice 9. On considère la suite (x_n) définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \frac{2x_n^2-3}{x_n+2}$.

a. Montrer que $x_n > 3$ pour tout n.

b. Montrer que $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ pour tout n.

c. Montrer que $x_n \geq (\frac{3}{2})^n + 3$ pour tout n.

Exercice 10. On dit qu'une famille de droites dans le plan est en position générale si elle ne contient pas trois droites concourantes, ni deux parallèles.

a. Quel est le nombre R_3 de régions du plan découpées par trois droites en position générale ? Dépend-il de la famille de droites considérées ?

b. On considère une famille de n droites $D_1, D_2, \ldots, D_n$ en position générale dans le plan. On note R_{n-1} le nombre de de régions découpées par $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$, et R_n le nombre de régions découpées par $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Montrer que $R_n = R_{n-1} + n$.

c. Montrer que le nombre R_n de régions découpées par une famille de n droites en position générale ne dépend pas de la famille considérée, et le calculer.