TOPOLOGIE

Exercice 1. Dire si les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont ouverts, fermés, ou ni l'un ni l'autre, en justifiant :

a. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$
b. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$
c. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2\}$
d. $([2,3] \cup \{0\}) \times [-1,1]$
e. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x^2+y^2) \geq 0\}$
f. $\mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$
g. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1,\ y \leq 2 \text{ et } x - y \geq 0\}$
h. $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
i. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1,0)\}$
j. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 - (x^2+y^2) = 0\}$

Montrer que le dernier ensemble est encore fermé lorsqu'on lui enlève le point $(0,0)$.

Exercice 2. *(partiel 2011-2012)*
On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^2$: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(\exp(x)) > \frac{1}{2}\}$.

a. Exprimer A comme image réciproque d'un intervalle et en déduire que A est ouvert.

Pour tout réel x on note $E(x)$ la partie entière de x, et $F(x) = x - E(x)$ la partie fractionnaire de x. On considère le sous-ensemble $B = \{x \in \mathbb{R} \mid F(\exp(x)) > \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{R}$.

b. Soit $k \in \mathbb{Z}$ un entier relatif fixé.
Montrer que le sous-ensemble $B_k = \{x \in \mathbb{R} \mid k + \frac{1}{2} < \exp(x) < k+1\}$ est ouvert.

c. Montrer avec soin que $B = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_k$. Montrer que B est ouvert.
Pourquoi ne peut-on pas procéder comme à la question 1 ?

Exercice 3. Déterminer la frontière, l'adhérence et l'intérieur des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^n$:

a. $]0,1] \subset \mathbb{R}$
b. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
c. $\{(x,y) \mid x^2 \leq y < x+2\} \subset \mathbb{R}^2$
d. $\{(\cos t, \sin t)\} \subset \mathbb{R}^2$
e. $\{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$
f. $\{(t, \sin(1/t)) \mid t \in \mathbb{R}_+^*\}$

Exercice 4. On se place dans $E =]-\infty, 0] \cup [1,2] \cup]3, +\infty[$, muni de la distance induite par la distance usuelle de $\mathbb{R}$. On note $B_o = B(1,1)$ (resp. $B_f = \bar{B}(1,1)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre 1 et rayon 1.

a. Expliciter les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$B_o,\quad \mathring{B}_o,\quad \overline{B_o},\quad B_f,\quad \overline{B_f},\quad \mathring{B}_f,\quad \operatorname{Fr} B_o,\quad \operatorname{Fr} B_f.$$

Maintenant E est un espace vectoriel normé. On fixe $a \in E$, $r > 0$ et on note $B_o = B(a,r)$ (resp. $B_f(a,r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre a et rayon r.

b. Montrer que $\overline{B_o} = B_f$ et $\mathring{B}_f = B_o$.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel normé et A, $B \subset E$.

a. Montrer que le complémentaire de $\mathring{A}$ est la fermeture de ${}^cA$.
Montrer que le complémentaire de $\overline{A}$ est l'intérieur de ${}^cA$.

b. (i) Montrer que $\operatorname{Fr} \overline{A} \subset \operatorname{Fr} A$ et $\operatorname{Fr} \mathring{A} \subset \operatorname{Fr} A$.
(ii) Donner un exemple où les inclusions précédentes sont strictes.

c. (i) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
(ii) Donner un exemple où l'inclusion précédente est stricte.
(iii) Montrer qu'il y a égalité lorsque $\operatorname{Fr} A \cap \operatorname{Fr} B = \emptyset$.

Exercice 6. Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$ non vide.

a. Montrer que $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$ pour tous x, $y \in E$.
En déduire que l'application $d_A : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x,A)$ est continue.

b. On note $A_r = \{x \in E \mid d(x,A) < r\}$. Montrer que A_r est ouvert. Déterminer $\bigcap_{r>0} A_r$ en fonction de A.
Montrer que tout fermé de E est intersection dénombrable d'ouverts.

c. Soit F_1, F_2 deux fermés disjoints de E. En considérant l'application $(x \mapsto d(x,F_1) - d(x,F_2))$, montrer qu'il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $F_1 \subset O_1$ et $F_2 \subset O_2$.

Exercice 7. *(rattrapage 2011-2012)*
On considère $E = \mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire et de la norme usuels. On fixe une base $(u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et on définit $N : L(E) \to \mathbb{R}_+$ en posant $N(f) = \sum_{i=1}^n \|f(u_i)\|$.

a. Montrer que N est une norme sur $L(E)$. Dans la suite $L(E)$ est muni de cette norme.
b. On fixe $v \in E$. Montrer que $F_v = \{f \in L(E) \mid v \cdot f(v) \geq 0\}$ est un fermé de $L(E)$.
c. On note $L(E)_+$ l'ensemble des applications linéaires $f \in L(E)$ telles que $v \cdot f(v) \geq 0$ pour tout $v \in E$. Montrer que $L(E)_+$ est un fermé de $L(E)$.
d. On note $B = \{f \in L(E) \mid \sum_{i=1}^n \|f(u_i)\| \leq 1\}$, et $B_+ = B \cap L(E)_+$.
Montrer qu'il existe deux constantes m, $M \in \mathbb{R}$ telles que $m \leq \det(f) \leq M$ pour toute $f \in B_+$.

Exercice 8. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|(m_{ij})_{ij}\| = \max_{i,j} |m_{ij}|$.
Rappelons qu'on note $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices inversibles.

a. Montrer que l'application déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue.
b. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.
c. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice. Montrer qu'à partir d'un certain rang k, la matrice $A - k^{-1} I_n$ est inversible.
On pourra raisonner par l'absurde, et utiliser le fait que A ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs propres.
d. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.
e. Application. On admet que la fonction qui à $A \in M_n(\mathbb{R})$ associe $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_n$ est continue.
   (i) Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ si A est inversible.
   (ii) En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour toutes matrices A, $B \in M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 9. *(examen 2011-2012)*
On fixe un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $SL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices dont le déterminant est égal à 1. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|(a_{ij})_{ij}\| = \max_{ij} |a_{ij}|$.

a. Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $GL_n(\mathbb{R})$.
b. On fixe $A \in SL_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det(tA)$ pour tout $t > 0$.
Dire pourquoi l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to M_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto tA$ est continue.
c. Montrer que le complémentaire de $SL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.
d. $SL_n(\mathbb{R})$ est-il compact ?

Exercice 10. On considère $E = C^1([-1,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

a. Soit $f \in E$ une fonction telle que $\forall g \in E \;\; \int_{-1}^1 fg = 0$. Montrer que $f = 0$.
b. Montrer que $\varphi : E \to \mathbb{R}, f \mapsto f'(0)$ n'est pas continue.
c. Montrer que $F = \{f \in E \mid f'(0) = 0\}$ est dense dans E.
d. Soit $f \in E$ une fonction telle que $\forall g \in F \;\; \int_{-1}^1 fg = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 11. Dans cet exercice on va montrer qu'un sous-groupe G de $(\mathbb{R}, +)$ est soit de la forme $r\mathbb{Z}$ avec $r \in \mathbb{R}$, soit dense dans $\mathbb{R}$. On suppose $G \neq \{0\}$ et on pose $r = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.

a. On suppose que la borne inférieure r est atteinte.
   (i) En écrivant $a \in G$ sous la forme $a = kr + x$ avec $x \in [0, r[$, montrer que $G = r\mathbb{Z}$.
   (ii) Montrer que G est fermé dans $\mathbb{R}$.
b. On suppose que la borne inférieure r n'est pas atteinte. On fixe $\epsilon > 0$.
   (i) Montrer qu'il existe a, $b \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tels que $|a - b| < \epsilon$.
   (ii) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in G$ tel que $|x - c| < \epsilon$. Conclure.

Exercice 12. *(partiel 2011-2012)*
On considère l'ensemble $X = [0, 1[$.
On note $d(x, y) = |x - y|$ la distance induite sur X par la distance usuelle de $\mathbb{R}$. On pose par ailleurs

$$d_\circ(x, y) = \min(d(x, y), 1 - d(x, y)).$$

a. Soit x, y, $z \in X$. Montrer que $d_\circ(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, puis que $d_\circ(x, z) \leq (1 - d(x, y)) + d(y, z)$.

On admet que de même $d_\circ(x, z) \leq d(x, y) + (1 - d(y, z))$ et que $d_\circ(x, z) \leq (1 - d(x, y)) + (1 - d(y, z))$.

b. Montrer que $d_\circ$ est une distance sur X.
c. On considère la suite $x_n = 1 - \frac{1}{n} \in X$.
Montrer que $\lim x_n = 0$ relativement à $d_\circ$. Les distances d et $d_\circ$ sont-elles équivalentes ?
d. On considère maintenant une suite quelconque d'éléments $x_n \in X$.
   (i) Montrer que si $\lim x_n = x$ relativement à d, alors $\lim x_n = x$ relativement à $d_\circ$.
   (ii) *Cette question est plus difficile.*
   Montrer que si $\lim x_n = x$ relativement à $d_\circ$, avec $x \neq 0$, alors $\lim x_n = x$ relativement à d.