Espaces complets

Exercice 1. L'ensemble $\mathbb{R}$ est-il complet pour les distances suivantes ?

$$d_1(x,y) = |x^3 - y^3|, \quad d_2(x,y) = |e^x - e^y|, \quad d_3(x,y) = \log(1 + |x-y|).$$

Indications. Si (x_n) est une suite de Cauchy pour d_1, on pourra considérer la suite (x_n^3). On pourra également considérer la fonction « cube » comme une isométrie relativement à des distances bien choisies. Pour d_3 on pourra utiliser l'encadrement $t\log(2) \le \log(1+t) \le t$ pour $t \in [0,1]$.

Exercice 2. L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est-il complet pour les distances suivantes ?

$$d_1(k,l) = |k-l|, \quad d_2(k,l) = \delta_{k,l}(1 + k^{-1} + l^{-1}), \quad d_3(k,l) = |k^{-1} - l^{-1}|.$$

Vérifier que $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $k \mapsto k+1$ est strictement contractante pour d_2 mais n'a pas de point fixe.
On étend d_3 à $X = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ en posant $d_3(k,\infty) = d_2(\infty,k) = k^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. L'espace (X, d_3) est-il complet ?

Indications. On précisera quelles sont les suites convergentes et les suites de Cauchy pour d_1 et d_2. Pour d_3, on pourra s'inspirer de l'exercice précédent.

Exercice 3. Montrer que les espaces métriques (E,d) et espaces vectoriels normés (E,N) suivants sont complets.

a. $E = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$, $d(k^2, l^2) = |k^2 - l^2|$.
b. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y \le \cos(x+y)\}$, $d((x,y),(x',y')) = |x-x'| + |y-y'|$.
c. $E = M_n(\mathbb{C})$, $N(A) = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tAA)}$.
d. $E = O_n(\mathbb{R})$, $d(A,B) = \sqrt{n - \mathrm{Tr}({}^tAB)}$.
e. $E = \{(x_i) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i = 0\}$, $N((x_i)) = \sum_i |x_i|$.
f. $E = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)^2 dt \le 1\}$, $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$.

Exercice 4. On fixe une énumération des rationnels : $\mathbb{Q} = \{r_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ avec $r_n \ne r_m$ pour $n \ne m$.
On considère $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et on pose pour tous $n \in \mathbb{N}$, x, $y \in X$:

$$d_n(x,y) = \big||x-r_n|^{-1} - |y-r_n|^{-1}\big|, \quad d'_n(x,y) = \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)} \quad \text{et}$$

$$d'(x,y) = |x-y| + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} d'_n(x,y).$$

a. Vérifier rapidement que d_n, d'_n sont des pseudo-distances, et que d' est une distance sur X.
b. Montrer que d' est topologiquement équivalente à la restriction de la distance usuelle de $\mathbb{R}$.
On cherchera, pour $x \in X$ et $\epsilon > 0$ fixé, un réel $\alpha > 0$ tel que $B_d(x,\alpha) \subset B_{d'}(x,\epsilon)$.
c. Soit $(x_k)_k \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy relativement à d'.
  (i) Montrer que (x_k) a une limite $x \in \mathbb{R}$ relativement à la distance usuelle.
  (ii) Montrer que x appartient à X. *On pourra considérer la suite $(|x_k - r_n|^{-1})_k$, pour n fixé.*
  (iii) Montrer que $d'(x_k, x_l)$ tend vers $d'(x_k, x)$ quand $l \to \infty$.
  (iv) Montrer que (x_k) converge vers x relativement à d'.
d. X est-il complet relativement à la distance usuelle ? à la distance d' ?

Exercice 5. On considère l'ensemble $E = \ell^1(\mathbb{N}, [0,1])$ des suites $u = (u(k))_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0,1]$ telles que $(\sum_k u(k))$ converge. On rappelle que la formule suivante définit une distance sur E :

$$d_1(u,v) = \sum_{k=0}^{\infty} |u(k) - v(k)|.$$

On veut montrer que E est un espace complet. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans E.

a. On fixe $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_n(k))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
b. Montrer qu'il existe une suite $v : \mathbb{N} \to [0,1]$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n(k) = v(k)$ pour tout k.
c. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que $d_1(u_p, u_q) \le \epsilon$ pour tous p, $q \ge P$.
  (i) Montrer qu'on a $\sum_{k=0}^{N} |u_p(k) - v(k)| \le \epsilon$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.
  (ii) En déduire que $v \in E$ et que $d_1(u_p, v) \le \epsilon$ pour tout $p \ge P$.
d. Conclure.

Exercice 6. On considère l'espace vectoriel $E = C^1([-1,1], \mathbb{R})$, et les normes sur E définies par

$$N(f) = \|f\|_\infty, \quad P(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

où on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme.

a. On pose $f_n(t) = \sqrt{n^{-1} + t^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $t \in [-1,1]$.
   (i) Calculer $g(t) = \lim f_n(t)$ pour tout $t \in [-1,1]$.
   (ii) Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers g.
   (iii) L'espace E est-il complet relativement à N ?

On rappelle le résultat suivant : si $(f_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe C^1 telle que $f_n(0)$ converge et $(f'_n)_n$ converge uniformément vers g, alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f telle que $f' = g$.

b. Montrer que E est complet relativement à P.

Exercice 7. Rappelons qu'une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante C telle que $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$ pour tous x, $y \in [0,1]$. On note alors $\mathrm{Lip}(f)$ la plus petite constante C convenable, c'est-à-dire

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}.$$

On considère l'espace E des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et nulles en 0.

a. Montrer que Lip est une norme sur E.
b. Montrer que pour $f \in E$ on a $\|f\|_\infty \leq \mathrm{Lip}(f)$.
c. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans (E, Lip).
   Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
d. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de E qui converge simplement vers une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
   On suppose que $\mathrm{Lip}(f_p - f_q) \leq L$ pour p fixé et q assez grand. Montrer que $\mathrm{Lip}(f_p - f) \leq L$ et que $f \in E$.
e. Montrer que (E, Lip) est un espace de Banach.

Exercice 8. On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme définie par la formule $\|P\| = \sum_{i=0}^n |a_i|$, si $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$.

a. Montrer que pour tout k, la forme linéaire $\varphi_k : P = \sum_{i=0}^\infty a_i X^i \mapsto a_k$ est continue.
b. On note S_n les sommes partielles du développement en série entière de l'exponentielle.
   Montrer que $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E qui ne converge pas dans E.
c. Soit $(P_n)_n$ une suite de polynôme telle que $\deg(P_n)$ ne tend pas vers $+\infty$.
   Montrer qu'il existe un entier d et une sous-suite $(P_{n_k})_k$ telle que $\deg(P_{n_k}) \leq d$ pour tout k.
d. Soit $(P_n)_n$ une suite de Cauchy dans E qui ne converge pas.
   Montrer que $\deg(P_n)$ tend vers $+\infty$.

Exercice 9. Montrer qu'il existe un unique point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} x = (\sin x + 8\cos y)/10 \quad \text{et} \\ y = (2\cos x + 7\sin y)/10. \end{cases}$$

On pourra montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bien choisie est uniformément strictement contractante relativement à la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pouvait-on appliquer la même méthode avec la norme $\|\cdot\|_1$?

Exercice 10. Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application. On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ soit uniformément strictement contractante.

a. Montrer que si x est point fixe de f^n, alors $f(x)$ est aussi point fixe de f^n.
b. En déduire que f admet un point fixe. Montrer que ce point fixe est unique.

Exercice 11. *(Examen 2011-2012)*
On note $\bar{B} = \bar{B}(0,1)$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ relative à la norme $N_\infty : (x,y) \mapsto \max(|x|,|y|)$. On considère le système d'équations

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} 6x &= 1 - x^2 + 3y, \\ 6y &= x + 2y^2. \end{cases}$$

a. Représenter $\bar{B}$ et montrer que $\bar{B}$ est un espace complet pour la distance induite par N_∞.
b. Écrire le système (S) sous la forme d'un problème de point fixe $(x,y) = f(x,y)$.
   Montrer que f est uniformément strictement contractante sur $\bar{B}$.
   En déduire que (S) admet une solution unique dans $\bar{B}$.
c. Montrer que (S) admet au moins deux solutions dans $\mathbb{R}^2$.
   L'application f est-elle uniformément strictement contractante sur $\mathbb{R}^2$?