Analyse 1

[*L'ordre de* $\mathbb{R}$]

Exercice 1. (Partiel 1, 2007) Soit A la partie de $\mathbb{R}$ définie par :

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

a. (i) Calculer a_0, a_1, a_2, a_3.
   (ii) Décomposer A sous la forme $A = A_1 \sqcup A_2$ avec $A_1 \subset]-\infty, 0[$ et $A_2 \subset [0, +\infty[$.

b. (i) Montrer que A_1 et A_2 sont bornées.
   (ii) En déduire que A l'est aussi.

c. (i) Déterminer, en justifiant, la bonne inférieure de A_1 et la borne supérieure de A_2.
   (ii) La partie A_1 a-t-elle une borne supérieure ? La partie A_2 a-t-elle une borne inférieure ?

d. La partie A a-t-elle une borne supérieure, une borne inférieure, un plus petit élément, un plus grand élément ?

Exercice 2. Soit $S = \left\{ \frac{n+1}{2n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

a. Montrer que S est majoré et minoré.
b. Calculer $\sup S$ en justifiant la réponse.
c. L'ensemble S possède-t-il un plus grand élément ?
d. Calculer $\inf S$.

Exercice 3. Soit $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2\}$.

a. Pourver que A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.
b. Montrer que pour $r \in \mathbb{Q}$ on a $r^2 \neq 2$.

On suppose que A possède une borne supérieure a *dans* $\mathbb{Q}$.
On pose $4\epsilon = |a^2 - 2|$. D'après la question précédente, $\epsilon > 0$.

c. Montrer que $1 \leq a \leq 2$.
d. On suppose que $a^2 < 2$. Montrer que $a + \epsilon \in A$.
e. On suppose que $a^2 > 2$. Montrer que $a - \epsilon$ est un majorant de A
f. Conclure.

Exercice 4. Soit $u_n = n^{(-1)^n}$ et $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. L'ensemble A admet-il des bornes supérieure et inférieure ? Si oui, les calculer.

Exercice 5. Soit E l'ensemble des réels de la forme $\dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
L'ensemble E admet-il une borne supérieure ? inférieure ? un plus petit élément ? un plus grand élément ?

Exercice 6. Soit A l'ensemble des nombres réels de la forme $\dfrac{2p^2 - 3q}{p^2 + q}$, où p et q sont des entiers vérifiant $0 < p < q$.

a. Montrer que A est borné par -3 et 2.
b. Déterminer $\inf(A)$ et $\sup(A)$.

Exercice 7. Soit $I = [0,1]$. On veut montrer que toute application croissante $f : I \to I$ admet un point fixe. Pour cela on pose $A = \{x \in I \mid f(x) \leq x\}$. Démontrer les 4 propriétés suivantes :

a. $A \neq \emptyset$,

b. $x \in A \implies f(x) \in A$,

c. A admet une borne inférieure a et $a \in I$,

d. $f(a) = a$.

Conclure.

Exercice 8. (Partiel 2009)

a. Soit A un ensemble de nombres réels. Rappeler les définitions de minorant de A et de borne inférieure de A.

b. Donner une caractérisation de la borne inférieure. (Plusieurs réponses possibles.)

c. Soit $A = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer si A admet des bornes inférieure et supérieure.

d. Soit A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ tels que $\forall a \in A \ \forall b \in B \ \ a \leq b$.
Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 9. (Partiel 1, 2011) Posons $A = \left\{ \frac{2n+4}{6n+5} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

a. Montrer que A est une partie de $\mathbb{R}$ majorée et minorée.

b. Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a
$$\frac{2n+4}{6n+5} = \frac{1}{3} + \frac{7}{18n+15}.$$

c. Montrer que A admet un plus grand élément, mais pas de plus petit élément.

d. Montrer que $\frac{1}{3}$ est la borne inférieure de A.

e. Quelle est la borne supérieure de A ?

Exercice 10. On désigne par $E(x)$ la partie entière du réel $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire l'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.

a. Montrer que pour $x \leq y$ on a $E(x) \leq E(y)$.

b. Montrer que $E(x+y) - E(x) - E(y)$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

c. Montrer que si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ alors $E(-x) = -E(x) - 1$.

d. Tracer le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto E(x)$.

[*Suites numériques*]

Exercice 11. Étudier la monotonie des suites suivantes :

$$a_n = (-2)^n, \quad b_n = n + (-1)^n, \quad c_n = \frac{n}{1+n}, \quad d_n = n^2 - 2n,$$
$$e_n = n(n+1)\cdots(2n-1)(2n), \quad f_n = n^n - n!, \quad g_n = n + 2\sin(n\pi/2).$$

Exercice 12. Étudier la convergence des suites suivantes :

$$a_n = \frac{2n^2 - 3n + 5}{3 - n^2}, \quad b_n = -3n^2 - n\sqrt{n} + n^2\ln(n), \quad c_n = \frac{\ln(n)+3}{2-n}, \quad d_n = \frac{e^{2n}+3n}{e^n - 5},$$
$$e_n = \frac{n^2 - \ln(n)}{n\ln(n) - 1}, \quad f_n = \frac{n}{\ln(n)} - 3\sqrt{n}, \quad g_n = n^{-2+(-1)^n}, \quad h_n = \frac{(-1)^n n + 1}{2n(-1)^n + 3}.$$

Exercice 13. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + (1/2)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n \leq 1/2^n$, et en déduire que $u_n \leq 3$.

c. Montrer que $(u_n)_n$ converge et calculer sa limite, en utilisant $v_n = u_n^2$.

Exercice 14. Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ et donner sa limite éventuelle :

a. $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = u_n - 1$,

b. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Exercice 15. (Partiel 2008) Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en choisissant $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et en posant $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$ pour tout $n \geq 0$.

a. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est bien définie et que $u_n > 0$ pour tout n.

b. (i) Calculer $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.
   (ii) En déduire que $u_n \geq \sqrt{a}$ pour tout n.
   (iii) Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{a})$ pour tout n.
   (iv) En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a $0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq M/2^n$, où M est une constante.
   (v) Conclure.

Exercice 16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 17. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \dfrac{x + 16}{x + 7}$.

a. Vérifier que cette suite est bien définie.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 8}$. Trouver une relation entre v_{n+1} et v_n.

c. Déterminer v_n pour tout n.

d. En déduire que $(u_n)_n$ converger et calculer sa limite.

Exercice 18. On considère la suite de nombres réels $(u_n)_n$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in]0, +\infty[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n^2 + 2)$.

a. Montrer que si la suite $(u_n)_n$ est convergente alors sa limite est égale à 1 ou 2.

b. Montrer que si $u_0 > 1$ alors $u_n > 1$ pour tout n.

c. Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n - 1)(u_n - 2)$. En déduire que
   (i) si $1 < u_n < 2$ alors $u_{n+1} < u_n$,
   (ii) si $2 < u_n$ alors $u_n < u_{n+1}$.

d. On suppose que $1 < u_0 < 2$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et donner sa limite.

e. On suppose que $2 < u_0$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est divergente et tend vers $+\infty$.

f. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_n$ lorsque $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$?

g. On suppose $0 < u_0 < 1$. La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ?

Exercice 19. (Partiel 2009) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.

a. Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout n.

b. Montrer que $(u_n)_n$ est une suite monotone.

c. Montrer que $(u_n)_n$ est une suite bornée.

d. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 20. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

a. Montrer que la suite $(w_n)_n$ définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite à termes positifs. Montrer que c'est une suite géométrique, dont on précisera la raison.

b. Déterminer la limite de la suite $(w_n)_n$.

c. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

d. Rappeler la définition des suites adjacentes.

e. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ converge vers la même limite, que l'on notera l.

f. Soit $(t_n)_n$ la suite définie par $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que cette suite est constante.

g. Déterminer la valeur de l.

Exercice 21. (Partiel 2011) On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 3$, $v_0 = 4$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

a. On pose $w_n = v_n - u_n$ pour tout n.
Rappeler la définition d'une suite géométrique.
Montrer que la suite $(w_n)_n$ est une suite géométrique.
Que peut-on en déduire pour le signe de w_n et la limite de $(w_n)_n$?

b. Rappeler la définition des suites adjacentes.

c. Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

d. On pose $t_n = u_n + 2v_n$. Montrer que la suite $(t_n)_n$ est constante.
En déduire la limite des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

Exercice 22. On pose $S_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = S_{n-1} + \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$.

b. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.

e. Montrer que la suite $(S_n)_n$ est strictement croissante.

f. Montrer que la suite $(S_n)_n$ est convergente.