# Espaces métriques
# Examen partiel

vendredi 11 octobre 2013

**Documents et calculatrices ne sont pas autorisés.**

**Durée : 2 heures.**

**Exercice 1.** *(4 points)*
On considère l'ensemble $X = \mathbb{R}$ et on définit $d : X \times X \to \mathbb{R}$ en posant :

$$d(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont non nuls et de signes différents,} \\ |x-y| & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Écrire les membres de gauche et de droite de l'inégalité triangulaire pour la norme $N_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$. *On ne demande pas de redémontrer ces inégalités.*
2. En déduire que pour tous $x$, $y$, $z \in \mathbb{R}$ on a $\sqrt{x^2+z^2} - \sqrt{y^2+z^2} \leq |x-y|$.
3. Montrer que $d$ est une distance.

**Exercice 2.** *(8 points)*
On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $N_2 : (x,y,z) \to \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, et $\mathbb{R}^2$ de la norme $N_\infty : (x,y) \mapsto \max(|x|,|y|)$. On considère l'espace vectoriel $E = M_{2,3}(\mathbb{R})$ des matrices réelles à deux lignes et trois colonnes. Pour $M = (m_{ij})_{ij} \in E$ on pose $P(M) = \max_{ij} |m_{ij}|$. Par ailleurs, si $M$ est une matrice dans $E$, et si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est l'application linéaire associée à $M$ dans les bases canoniques, on note $Q(M) = \|f\|_{N_2 \to N_\infty}$ la norme d'opérateur de $f$ relative à $N_2$ (au départ) et $N_\infty$ (à l'arrivée). On admet que $Q$ est une norme sur $E$.

1. Montrer que $P$ est une norme sur $E$.
2. On considère la matrice
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
et on note $f_1$ l'application linéaire associée dans les bases canoniques.
   a. Écrire l'expression de $f_1(a,b,c)$ en fonction de $a$, $b$ et $c$.
   b. Montrer que $Q(M_1) \geq \sqrt{3}$. *On pourra considérer l'image du vecteur* $(1,1,1)$.
3. Dans cette question $M = (m_{ij})_{ij}$ est une matrice quelconque dans $E$.
On note $f$ l'application linéaire associée à $M$ dans les bases canoniques.
   a. Donner l'expression de $N_\infty(f(a,b,c))$ en fonction de $a$, $b$, $c$ et des coefficients de $M$ : $m_{11}$, $m_{12}$, $m_{13}$, $m_{21}$, $m_{22}$ et $m_{23}$.
   b. Montrer que $Q(M) \leq \sqrt{3}P(M)$.
   c. Déterminer la valeur de $Q(M_1)$.

**Exercice 3.** *(8 points)*
On considère l'espace vectoriel $E = C([-1,1],\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues définies sur $[-1,1]$. Pour $f \in E$ on pose

$$N(f) = \sup_{t\in[-1,1]} |t^2 f(t)| \quad \text{et} \quad P(f) = \int_{-1}^{1} |f(t)| \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $N$ et $P$ sont des normes sur $E$.
2. Les normes $N$ et $P$ sont-elles équivalentes ? *On pourra considérer les fonctions* $f_n : t \mapsto t^n$.

On considère l'application linéaire $L : E \to E$ définie par $L(f) = (t \mapsto tf(-t))$.

3. Montrer que $L$ est un opérateur borné relativement à $P$ (au départ et à l'arrivée).
4. a. Calculer $P(L(f_n))$ et $P(f_n)$. En déduire un minorant de la norme d'opérateur $\|L\|_{P\to P}$ relative à $P$ au départ et à l'arrivée.
   b. Déterminer la valeur de $\|L\|_{P\to P}$.