Partiel du 7 novembre

2023 *(5 points)*

1. Déterminer un équivalent simple de $\sqrt{t}+2t$ en 0^+.
2. Déterminer un équivalent simple de $1-\cos(t)$ en 0.
3. Déterminer la nature de l'intégrale généralisée suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}+2t}{\sqrt{1-\cos t}}\mathrm{d}t.$$

2024 *(5 points)*
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. La fonction f est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?

On considère l'équation différentielle (E) : $tx' + x = \cos t$, d'inconnue $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

2025 [Problème.] *(10 points)*
On considère la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n}$.

1. Étudier le sens de variation de la suite $(x_n)_n$, et en déduire que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
2. (a) Donner un équivalent simple de $\sqrt{1+t}-1$ quand $t \to 0$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}$.
3. On pose $u_n = \sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on va étudier la série $(\sum_{n\geq 0} u_n)$.
   On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ les sommes partielles de cette série.
   (a) Exprimer x_n à l'aide des sommes partielles S_n de la série $(\sum u_n)$.
   (b) i. Exprimer u_n en fonction de x_n seul, puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.
   Qu'obtient-on comme équivalent simple de la suite $(u_n)_n$?
   ii. Quelle est la nature de la série $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$?
   Donner un équivalent de la suite des sommes partielles S_n.
   On pourra utiliser le Théorème de comparaison rappelé ci-dessous.
   (c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple de la suite $(x_n)_n$.
4. On pose $w_n = \sqrt{x_n} - \frac{1}{2}n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $w_{n+1} - w_n \sim -\frac{1}{8\sqrt{x_n}}$. *On pourra utiliser un $DL_2(0)$ de $\sqrt{1+t}$.*
   (b) Quelle est la nature de la série $(\sum_{n\geq 1}(w_{n+1}-w_n))$? En déduire un équivalent de la suite $(w_n)_n$.
   On rappelle que $H_n \sim \ln(n)$, où on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (c) Déterminer α, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $x_n = \alpha n^2 + \beta n \ln(n) + o(n\ln(n))$.

On rappelle le *Théorème de comparaison* suivant. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives.
On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ les sommes partielles des séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$.
Lorsque les séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ convergent, on note $Q_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$ leurs restes.
On suppose enfin que $u_n \sim v_n$. Alors :

— Si $(\sum v_n)$ diverge, alors $(\sum u_n)$ diverge aussi et on a $T_n \sim S_n$.
— Si $(\sum v_n)$ converge, alors $(\sum u_n)$ converge aussi et on a $R_n \sim Q_n$.