Intégration

Exercice 1.

a. On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon. La fonction f est-elle intégrable au sens de Riemann ? Rappeler pourquoi.

b. On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, et $g(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ pour $0 \leq p \leq q$ entiers premiers entre eux. On fixe un nombre premier P.

(i) Trouver une fonction en escalier h telle que $g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in [0,1]$, et $h(x) \leq \frac{1}{P}$ *sauf pour un nombre fini de points* $x \in [0,1]$.

(ii) Montrer que g est intégrable au sens de Riemann. Que vaut $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$?

Exercice 2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.
On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on pose $a_k = \frac{k}{n}$ pour $k = 0, \ldots, n$.

a. On définit des fonctions g, $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ en posant $g(1) = h(1) = f(1)$, et pour tout $k = 0, \ldots, n-1$:

$$\forall\, x \in [a_k, a_{k+1}[\quad g(x) = f(a_k) \quad \text{et} \quad h(x) = f(a_{k+1}).$$

Déterminer $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x$ en fonction des valeurs $f(a_k)$.

b. Montrer que f est intégrable au sens de Riemann.

c. Exemple. On considère la fonction f définie par $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et

$$\forall r \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \left[\tfrac{1}{r+1}, \tfrac{1}{r}\right[\quad f(x) = \frac{1}{r}.$$

Montrer que f est intégrable au sens de Riemann. Est-elle continue par morceaux ?

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes en utilisant des sommes de Riemann : $I = \int_0^1 t\mathrm{d}t$, $J = \int_0^x e^t\mathrm{d}t$.

Exercice 4. Calculer la limite des suites suivantes :

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}, \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2},$$

$$D_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}, \quad E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{k^2+n^2}, \quad F_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}, \quad G_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}.$$

Donner un équivalent de $H_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

Exercice 5. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \tfrac{1}{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right) = \exp \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

On pourra utiliser l'encadrement $x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$, valable pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$.

Exercice 6. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On suppose qu'on a

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\} \quad \int_a^b x^k f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

On veut montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a,b]$.
On note $a \leq x_1 < \cdots < x_p \leq b$ les points où f change de signe.

a. Quelle conclusion veut-on obtenir dans le cas $n = 0$? Le résultat est-il vrai dans ce cas ?

b. Montrer qu'on a $\int_a^b P(x)f(x)\mathrm{d}x = 0$ pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n.

c. Posons $P = \prod_{i=1}^{p}(X - x_i)$. En supposant que $p \leq n$, montrer qu'on a $P(x)f(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

d. Conclure.

Exercice 7. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer qu'on a $\int_a^b |f| = |\int_a^b f|$ si et seulement si f est positive sur $[a, b]$ ou négative sur $[a, b]$.
Indication. Pour la réciproque on distinguera les deux cas $\int_a^b f \geq 0$, $\int_a^b f \leq 0$.
On remarquera également qu'on a $|y| - y \geq 0$ et $|y| + y \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x + \int_a^b f(x)^4 \mathrm{d}x = 2 \int_a^b f(x)^3 \mathrm{d}x$.
Montrer que f est constante sur $[a, b]$, égale à 0 ou à 1. *Indication :* factoriser le polynôme $X^4 - 2X^3 + X^2$.

Exercice 9. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on définit une fonction $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto (n + 1)(\cos x)^n \sin x$.

a. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\mathrm{d}x$ pour tout n.
b. On fixe $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Déterminer la limite de la suite $(f_n(x))_n$, que l'on notera $f(x)$.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge *simplement* (ou point par point) vers la fonction f.
c. A-t-on $\lim_{n\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$?

Exercice 10. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction $f_n : [1, e] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2(\ln x)^n$. On pose $I_n = \int_1^e f_n(x)\mathrm{d}x$.

a. Justifier l'intégrabilité de f_n sur $[1, e]$.
b. Déterminer la limite $f(x) = \lim_{n\infty} f_n(x)$, pour tout $x \in [1, e]$.
La fonction f est elle-continue sur $[1, e]$? est-elle intégrable ?
c. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante et en déduire qu'elle converge.
d. En majorant x^3 par e^3 sur $[1, e]$, donner un majorant de f_n sur $[1, e]$, et en déduire un majorant de I_n.
e. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_n$? A-t-on $\lim_{n\infty} \int_1^e f_n(x)\mathrm{d}x = \int_1^e f(x)\mathrm{d}x$?

Exercice 11. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on étudie la fonction $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n - x^{n+1}$.

a. Déterminer la limite $f(x) = \lim_{n\infty} f_n(x)$, pour tout $x \in [0, 1]$.
On a ainsi $|f(x) - f_n(x)| \to 0$ pour tout x.
b. Étudier la fonction f_n sur $[0, 1]$, pour tout n.
c. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_n$ qui tend vers 0 et telle que $|f(x) - f_n(x)| \leq a_n$ pour tout $x \in [0, 1]$.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge *uniformément* vers la fonction f.
d. On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$. Montrer *sans calcul supplémentaire* que $(I_n)_n$ converge, et déterminer sa limite.

Exercice 12. Pour chaque n on définit une fonction $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^n}$. On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

a. Déterminer la limite (simple) f de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
b. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est croissante. Converge-t-elle ?
c. Montrer que $1 - f_n(x)$ est majoré par x^n pour tout $x \in [0, 1]$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$.
d. A-t-on $\lim_{n\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$?
La convergence de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers f est-elle uniforme ?
e. Justifier l'identité suivante :
$$1 - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1 + x^n)\mathrm{d}x.$$
f. En déduire le développement asymptotique $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o(\frac{1}{n})$.

Exercice 13. On considère les *intégrales de Wallis* $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n \mathrm{d}x$.

a. Montrer que la suite $(W_n)_n$ est positive et décroissante.
b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
c. Trouver un encadrement de $\frac{W_n}{W_{n+1}}$ qui permette de montrer que $W_n \sim W_{n+1}$.
On utilisera les deux questions précédentes.
d. À l'aide de la question b, donner une expression de W_n sans intégrale.
On distinguera selon la parité de n.
e. Simplifier le produit $W_n W_{n+1}$ et en déduire que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
f. Application. On admet la *formule de De Moivre* $n! \sim C\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n$.
En exprimant W_{2n} à l'aide de factorielles, déterminer la valeur de la constante C.