Équations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes.

a. $x' + 2x = t^2 - 2t + 3$,

b. $7x' + 2x = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 1$,

c. $x' + x = te^{-t}$,

d. $x' - 2x = \cos t + 2\sin t$.

e. $x' + x = t - e^t + \cos t$.

On commencera par résoudre les équations sans second membre.
Puis on cherchera une solution particulière de même forme que le second membre.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes.

a. $x'' - 4x' + 4x = 0$,

b. $x'' - 6x' + x = 0$,

c. $x'' - 2x' - 3x = t^2$,

d. $x'' + x' - 2x = 6(e^t - e^{-t})$,

e. $x'' + x' - 6x = 5e^{2t} - t - 1$,

f. $x'' - x' - 2x = \cos t$,

g. $x'' + 4x = e^t + \cos(2t)$.

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes.
On donnera également la solution vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$.

a. $x + 4x = 0$,

b. $2x' - 3x = 0$,

c. $x' + x = \frac{1}{1+e^t}$,

d. $x' + x = e^t - 1$,

e. $x' + 2x = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-2t}$,

f. $x' + 2x = \frac{2t-1}{t^2}$,

On commencera par résoudre les équations sans second membre.
Puis on utilisera la méthode de variation de la constante.

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $t^2x' - x = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

b. $(t\ln t)x' - x = 0$ sur $]1, +\infty[$,

c. $x' - \frac{1}{t}x = t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

d. $x' - \frac{2}{t}x = t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

e. $(t+1)x' + tx = t^2 - t + 1$ sur $]-1, +\infty[$,

f. $x' - 2tx = -(2t-1)e^t$,

g. $(1+t)x' + x = 1 + \ln(1+t)$ sur $]-1, +\infty[$,

h. $x' + (\tan t)x = (\cos t)^{-1}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On commencera par résoudre les équations sans second membre en calculant une primitive.
Puis on utilisera la méthode de variation de la constante.

Exercice 5. Pour $t > 1$ on pose

$$g(t) = \frac{1+t}{t(1-t)}, \quad h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(t-1)}, \quad k(t) = \frac{\sqrt{t}}{(t-1)^2}.$$

a. Déterminer les réels a, b tels que $g(t) = \frac{a}{t} + \frac{b}{1-t}$ pour tout $t > 1$.
En déduire une primitive de g sur $]1, +\infty[$.

b. À l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive de h.
On pourra utiliser l'identité $\frac{2}{t^2-1} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$.

c. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de k.

d. À l'aide des questions précédentes, résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle $2t(1-t)x' + (1+t)x = t$.
On commencera par l'équation sans second membre.

Exercice 6. On considère l'équation différentielle $t^2x' - x = 0$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont de la forme $f_A(t) = Af_1(t)$, avec f_1 une fonction à déterminer.

b. Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ sont de la forme $g_B(t) = Bg_1(t)$, avec g_1 une fonction à déterminer.

c. On considère la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $h(t) = g_B(t)$ pour $t < 0$, $h(0) = C$, $h(t) = f_A(t)$ pour $t > 0$.
À quelles conditions sur A, B, C la fonction h est-elle continue en 0 ?
Montrer qu'alors h est dérivable en 0 et déterminer $h'(0)$.

d. Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ entier.

Exercice 7. On considère l'équation différentielle $tx' - 2x = t^3$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$, et celui sur $\mathbb{R}_-^*$.

b. Montrer que l'on peut toujours recoller une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et une solution sur $\mathbb{R}_-^*$ pour obtenir une solution définie sur $\mathbb{R}$ entier.

c. Quelle est la dimension de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$?

Exercice 8.

a. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) + f(t) = f(0) + f(1).$$

b. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) + f(t) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 9.

a. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $|g(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \geq M$.
Montrer que pour tout $x \geq M$ on a

$$\left| e^{-x} \int_M^x e^t g(t)\mathrm{d}t \right| \leq \varepsilon.$$

b. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.