Université de Caen
UFR Sciences
M1 MFA

2$^{\text{e}}$ semestre 2015-2016
Mathématiques
Espaces Fonctionnels

Espaces Fonctionnels
Examen UAGR2AT
13 avril 2016

Exercice 1. On considère l'espace $H = L^2([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. On note $L'(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H, muni de la norme d'opérateur.
Pour toute fonction $K \in C([0,1]^2,\mathbb{R})$, on considère l'*opérateur à noyau* associé $T : H \to H$, donné par la formule

$$T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t)\mathrm{d}t.$$

On note Pol $\subset C([0,1]^2,\mathbb{R})$ le sous-espace des fonctions polynomiales.

1. Montrer que T est une application linéaire continue et que $\|T\| \leq \|K\|_\infty$.
2. On considère le cas où le noyau K est polynomial : $K(s,t) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N a_{k,l} s^k t^l$.
   (a) Montrer que $T(f)$ est alors un polynôme, dont on calculera les coefficients en fonctions des coefficients $a_{k,l}$ et des *moments* de f donnés par la formule $m_l(f) = \int_0^1 t^l f(t)\mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que dans ce cas T est une application linéaire de rang fini, i.e. $\dim \operatorname{Im} T < +\infty$.
3. Montrer que toute fonction continue $K \in C([0,1]^2,\mathbb{R})$ est limite uniforme de polynômes $P \in$ Pol.
   On appliquera le théorème de Stone-Weierstraß après avoir soigneusement vérifié ses hypothèses.
4. Montrer que tout opérateur à noyau T associé à un noyau K continu sur $[0,1]^2$ est limite dans $L'(H)$ d'applications linéaires de rang fini.

Exercice 2. Soit E un espace de Banach *de dimension infinie* et $T \in L'(E)$ un opérateur borné *bijectif*.

1. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\|T(x)\| \geq 2\epsilon\|x\|$ pour tout $x \in E$.
2. Soit $S \in L'(E)$ un opérateur borné tel que $\|T - S\| \leq \epsilon$.
   Montrer qu'on a $\|S(x)\| \geq \epsilon\|x\|$ pour tout $x \in E$. En particulier, S est injectif.
3. L'application T est-elle limite d'applications linéaires de rang fini dans $L'(E)$?

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert et $T \in L'(H)$ un opérateur borné tel que $T^* = T$.

1. Rappeler la définition de $|T|$. Montrer que $\operatorname{Ker}|T| = \operatorname{Ker} T$. *On pourra calculer* $\||T|(x)\|^2$.
2. Montrer que $(T - |T|)(T + |T|) = 0$.
3. On note $K_+ = \operatorname{Ker}(T + |T|)^\perp$, $K_- = \operatorname{Ker}(T - |T|)^\perp$.
   Montrer que $K_+ \perp K_-$, puis que $K_+^\perp \cap K_-^\perp = \operatorname{Ker} T$.
   On a ainsi une décomposition en somme directe orthogonale $H = K_- \oplus \operatorname{Ker} T \oplus K_+$.
4. Montrer que $T = |T|$ sur $K_+ \oplus \operatorname{Ker} T$ et $T = -|T|$ sur $K_- \oplus \operatorname{Ker} T$.
   Montrer que $T(K_+) \subset K_+$ et $T(K_-) \subset K_-$.
5. Montrer qu'il existe deux opérateurs **positifs** T_+, $T_- \in L'(H)$ tels que $T = T_+ - T_-$ et $|T| = T_+ + T_-$.
6. Montrer que $T \leq |T|$.

Exercice 4. On considère l'espace $E = L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de la norme du sup essentiel $\| \cdot \|_\infty$.
Pour $f \in E$ on pose $\varphi_n(f) = \frac{1}{n} \int_{-n}^{n} f(t) \mathrm{d}t$.

1. Montrer que les formes linéaires φ_n sont continues.
   Montrer que la suite $(\varphi_n)_n$ est bornée dans E'.
2. On note $F_k \subset E'$ l'adhérence de $\{\varphi_n \mid n \geq k\}$ pour la topologie préfaible.
   Montrer que $\bigcap_k F_k$ est non vide. On fixe $\psi \in \bigcap_k F_k$.
3. On considère $K = \{\varphi \in E' \mid \varphi(1_E) = 1\}$, où 1_E est la fonction constante égale à 1.
   Montrer que K est fermé pour la topologie préfaible. Montrer que $\psi(1_E) = 1$.
4. Soit $f \in E$ une fonction telle que $f(t) \geq 0$ pour tout t.
   En procédant comme à la question précédente, montrer que $\psi(f) \geq 0$.

On rappelle que, par définition de l'adhérence, ψ appartient à F_k **ssi** *tout ouvert préfaible contenant ψ contient aussi une forme φ_n avec $n \geq k$.*

5. On fixe $f \in E$, $\tau \in \mathbb{R}$ et on pose $g(t) = f(t + \tau)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On fixe $\epsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|\varphi_n(f) - \varphi_n(g)| < \epsilon/3$ pour tout $n \geq k$.
   (b) Montrer qu'il existe $n \geq k$ tel que $|\varphi_n(f) - \psi(f)| < \epsilon/3$ et $|\varphi_n(g) - \psi(g)| < \epsilon/3$.
   (c) En déduire que $\psi(f) = \psi(g)$.