Partiel du 4 novembre

Exercice 1. Déterminer les natures des trois séries données par les termes généraux suivants :

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}, \quad v_n = \frac{2^n}{n+1}, \quad w_n = \frac{1}{(\ln n)^n}.$$

Exercice 2.

1. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction

$$g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto \frac{\ln(s)}{(1+s)^2}.$$

2. En déduire une primitive de la fonction

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ t \mapsto \frac{te^t}{(1+e^t)^2}.$$

Exercice 3. Étudier la convergence de l'intégrale généralisée suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x.$$

On n'oubliera pas d'étudier la convergence aux *deux* bornes.
Il n'est *pas* conseillé de procéder à une intégration par parties.

Exercice 4. On considère les équations différentielles suivantes, de fonction inconnue x :

$$\begin{array}{ll} (E_0) & 2(t-1)x' + x = 0 \\ (E_1) & 2(t-1)x' + x = t-1 \\ (E_2) & 2(t-1)x' + x = \dfrac{2\ln t}{t-1} \end{array}$$

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

1. Résoudre (E_0) sur $]1, +\infty[$.
2. (a) Résoudre (E_1) sur $]1, +\infty[$.
   (b) L'équation (E_1) admet-elle des solutions x telles que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$?
   Admet-elle des solutions x telles que $\lim_{t\to1^+} x(t) = 0$?
   (c) Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}$ entier.
3. On note $G :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la primitive nulle en $t = 2$ de la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\ln t}{(t-1)^{3/2}}$.
   (a) Résoudre (E_2) sur $]1, +\infty[$.
   Pour donner la réponse on utilisera la fonction G, qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement.
   (b) Étudier la convergence de l'intégrale suivante :

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{\ln u}{(u-1)^{3/2}} \, \mathrm{d}u.$$

   (c) Montrer que toutes les solutions de (E_2) sur $]1, +\infty[$ ont une limite nulle en $+\infty$.
   (d) L'équation (E_2) admet-elle des solutions bornées sur $]1, +\infty[$?
   Cette question est plus difficile. On pourra utiliser l'encadrement $(t-1)/2 \leq \ln t \leq (t-1)$ *valable sur* $[1, 2]$.